

A 05. Uma (rápida) revisão: Noções elementares da Teoria da Medida

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Teorema 1.28 Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ -finita e f uma densidade em relação a μ . Defina, para $A \in \mathcal{E}$,

$$\nu(A) = \int_E 1_A f \, d\mu = \int_A f \, d\mu. \quad (1.19)$$

Então ν é uma medida σ -finita em $(E, \mathcal{E})$, chamada **medida de densidade** f em relação a μ , denotada $d\nu = f \, d\mu$.

Além disso, para toda função mensurável positiva $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, temos

$$\int_E g \, d\nu = \int_E g \, f \, d\mu. \quad (1.20)$$

Uma função mensurável $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a ν se e somente se gf é integrável em relação a μ , e nesse caso (1.20) também vale.

Prova do Teorema 1.28

O funcional

$$\mathcal{E}^+ \ni g \mapsto \int_E gf \, d\mu$$

é não negativo e linear e passa ao limite em seqüências crescentes (Teorema de Beppo Levi). Pela Proposição 1.24,

$$\nu(A) := I(1_A) = \int_A f \, d\mu$$

é uma medida e (1.20) vale para toda g positiva.

ν é σ -finita: se $(A_n)_n$ é tal que $\bigcup_n A_n = E$ e $f1_{A_n}$ é integrável, então

$$\nu(A_n) = \int_E f1_{A_n} d\mu < +\infty.$$

A fórmula (1.20) para g integrável geral segue por decomposição em partes positiva e negativa.

Sejam μ, ν medidas σ -finitas em $(E, \mathcal{E})$.

Dizemos que ν é **absolutamente contínua** em relação a μ , denotado $\nu \ll \mu$, se e somente se todo conjunto μ -negligenciável $A \in \mathcal{E}$ (i.e., $\mu(A) = 0$) também for ν -negligenciável.

Se ν tem densidade f em relação a μ , então claramente $\nu \ll \mu$.

Teorema 1.29 (Radon–Nikodym) Se μ, ν são σ -finitas e $\nu \ll \mu$, então ν tem uma densidade em relação a μ .

Observação: Uma prova deste teorema pode ser encontrada na maioria dos livros de referência da disciplina.

É importante saber se uma medida de Borel ν em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tem densidade em relação à medida de Lebesgue λ , i.e., se $\nu \ll \lambda$, e poder computá-la.

Para $\nu \ll \lambda$, é necessário que $\nu(\{x\}) = 0$ para todo x , pois $\lambda(\{x\}) = 0$. A função de distribuição F de ν deve ser contínua.

Conexão com funções absolutamente contínuas

Suponha ainda que F seja absolutamente contínua, logo diferenciável q.s., com $F'(x) = f(x)$, e para todo $a < b$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.21)$$

O lado direito é $\nu([a, b[)$, o esquerdo é o valor da medida $fd\lambda$ em $[a, b[$. As medidas ν e $fd\lambda$ coincidem nos intervalos semiabertos, logo em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Critério de Carathéodory).

Observação sobre unicidade da densidade

Não é correto falar de a densidade de ν em relação a μ : se f é uma densidade, então toda função g μ -equivalente a f (i.e., $f = g$ μ -q.s.) também é.

Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida, V um espaço vetorial normado e $f : E \rightarrow V$ mensurável. Para $1 \leq p < +\infty$, defina

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

e para $p = +\infty$,

$$\|f\|_\infty = \inf \{M; \mu(|f| > M) = 0\}.$$

O conjunto $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ é negligenciável.

Espaços $\mathcal{L}^p$ e desigualdades fundamentais

Defina $\mathcal{L}^p = \{f; \|f\|_p < +\infty\}$. Valem as desigualdades:

- **Minkowski:** $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$.
- **Hölder:** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Espaços L^p como espaços normados

Graças a Minkowski, $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ uma seminorma. Não é norma pois pode ocorrer $\|f\|_p = 0$ com $f \neq 0$ (isso ocorre sse $f = 0$ q.s.).

Defina a relação de equivalência $f \sim g$ se $f = g$ q.s. e tome $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$. Então L^p é um espaço normado.

Uma sequência $(f_n)_n \subset L^p$ converge para f em L^p se $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Observação 1.30: A aplicação $f \mapsto \|f\|_p$ é contínua (de L^p em $\mathbb{R}^+$), e convergência em L^p implica convergência das normas.

Espaços produto e σ -álgebra produto

Sejam $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_m, \mathcal{E}_m)$ espaços mensuráveis. No produto $E = E_1 \times \dots \times E_m$ defina a σ -álgebra produto:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_m = \sigma(A_1 \times \dots \times A_m; A_i \in \mathcal{E}_i).$$

É a menor σ -álgebra contendo os "retângulos" $A_1 \times \dots \times A_m$.

Proposição 1.31

Sejam $p_i : E \rightarrow E_i$ as projeções canônicas. Então p_i é mensurável $(E, \mathcal{E}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$ e a σ -álgebra produto $\mathcal{E}$ é a menor σ -álgebra em E que torna as projeções p_i mensuráveis.

Mensurabilidade de mapas para o produto

Seja $(G, \mathcal{G})$ mensurável e $f = (f_1, \dots, f_m) : (G, \mathcal{G}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$. Consequência imediata: f é mensurável se e somente se cada componente f_i o for pois

$$f_i = p_i \circ f$$

é mensurável.

Borel no espaço produto vs. produto dos Borels

Dados dois espaços topológicos, no produto podemos considerar:

- ① O produto das σ -álgebras de Borel: $\mathcal{B}(E_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(E_m)$.
- ② A σ -álgebra de Borel da topologia produto: $\mathcal{B}(E_1 \times \cdots \times E_m)$.

Elas coincidem? Em geral não, mas sob hipóteses razoáveis sim.

Proposição 1.32

Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços topológicos.

(a) $\mathcal{B}(E_1 \times \dots \times E_m) \supset \mathcal{B}(E_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(E_m).$

(b) Se $E_1, \dots, E_m$ têm base enumerável de abertos, então

$$\mathcal{B}(E_1 \times \dots \times E_m) = \mathcal{B}(E_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(E_m).$$

Igualdade de medidas no produto

Se μ, ν são medidas finitas no espaço produto, pelo Critério de Carathéodory, se elas coincidem em retângulos, então são iguais (a classe de retângulos é estável para interseções finitas).

Para provar $\mu = \nu$, também é suficiente verificar que

$$\int_E f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) d\mu(x) = \int_E f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) d\nu(x)$$

para toda escolha de funções mensuráveis limitadas $f_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$. Se os E_i são espaços métricos, um argumento similar ao da Proposição 1.25 fornece um critério.