

A 06. Uma (rápida) revisão: Noções elementares da Teoria da Medida

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Proposição 1.33

Proposição 1.33 Suponha que $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, \dots, m$, sejam espaços métricos munidos de suas σ -álgebras de Borel. Sejam μ, ν medidas finitas no espaço produto.

(a) Se

$$\int_E f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) d\mu(x) = \int_E f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) d\nu(x) \quad (1.27)$$

para toda escolha de funções contínuas limitadas $f_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$, então $\mu = \nu$.

Proposição 1.33 (b)

(b) Se, além disso, os espaços E_i são separáveis e localmente compactos e se (1.27) vale para toda escolha de funções contínuas com suporte compacto f_i , então $\mu = \nu$.

Construção da medida produto

Sejam $\mu_1, \dots, \mu_m$ medidas σ -finitas em $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_m, \mathcal{E}_m)$ respectivamente. Para todo retângulo $A = A_1 \times \dots \times A_m$, defina

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_m(A_m). \quad (1.28)$$

É possível estender μ a uma medida na σ -álgebra produto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_m$?

É mais fácil proceder seguindo a ideia da Proposição 1.24: construir um funcional não negativo e linear nas funções positivas de $(E, \mathcal{E})$ que passe ao limite em seqüências crescentes. Para simplificar, assuma $m = 2$ e seja $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ mensurável positiva.

- (1) Prove que, para cada $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, as funções $f(x_1, \cdot)$ e $f(\cdot, x_2)$ são respectivamente $\mathcal{E}_2$ - e $\mathcal{E}_1$ -mensuráveis.
- (2) Prove que as funções "parcialmente integradas"

$$x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2), \quad x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

são respectivamente $\mathcal{E}_1$ - e $\mathcal{E}_2$ -mensuráveis.

(3) Defina

$$I(f) = \int_{E_2} d\mu_2(x_2) \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1). \quad (1.29)$$

O funcional I satisfaz as hipóteses (a) e (b) da Proposição 1.24 (use Beppo Levi duas vezes).

Então $\mu(A) = I(1_A)$ define uma medida em $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Tal μ satisfaz (1.28), pois

$$\mu(A_1 \times A_2) = I(1_{A_1 \times A_2}) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Esta é a extensão desejada. A medida μ é a **medida produto** de μ_1 e μ_2 , denotada $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Unicidade da medida produto

A unicidade segue do Critério de Carathéodory (Proposição 1.11), pois duas medidas satisfazendo (1.28) coincidem nos retângulos de medida finita, que formam uma classe estável para interseções finitas e, como as μ_i são σ -finitas, geram a σ -álgebra produto.

Teorema de Fubini–Tonelli

Teorema 1.34 (Fubini–Tonelli) Seja $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável em relação a $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, e sejam μ_1, μ_2 medidas σ -finitas em $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$. Seja $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ seu produto.

(a) Se f é positiva, então as funções

$$x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2), \quad x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

são respectivamente $\mathcal{E}_1$ - e $\mathcal{E}_2$ -mensuráveis. Além disso,

$$\int_{E_1 \times E_2} f d\mu = \int_{E_2} d\mu_2(x_2) \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) = \int_{E_1} d\mu_1(x_1) \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$$

(b) Se f é real, numérica ou complexa e integrável em relação a $\mu_1 \otimes \mu_2$, então as funções em (1.30) são respectivamente $\mathcal{E}_1$ - e $\mathcal{E}_2$ -mensuráveis e integráveis em relação a μ_1 e μ_2 , e (1.31) vale.

Na prática:

- Se f é positiva, pode-se integrar em qualquer ordem; o resultado é igual à integral em relação à medida produto (pode ser $+\infty$).
- Se f é real/complexa e muda de sinal, para usar (1.31) deve-se verificar que f é integrável (i.e., $\int |f| d\mu < \infty$). Usa-se a parte (a) em $|f|$ para verificar integrabilidade, depois aplica-se (b) para calcular a integral.

Observação 1.35

O Corolário 1.22 (integração de séries) pode ser visto como consequência do Teorema de Fubini.

Dada uma sequência $(f_n)_n$ de funções mensuráveis $E \rightarrow \mathbb{R}$, considere $\Phi_f : \mathbb{N} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(n, x) \mapsto f_n(x)$. A relação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

é exatamente o teorema de Fubini para Φ_f integrada em relação à medida produto $\nu_c \otimes \mu$, onde ν_c é a medida de contagem em $\mathbb{N}$.

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$

Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Por Proposição 1.32, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Seja $\lambda_d = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ (d vezes). Pelo Critério de Carathéodory, λ_d é a única medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tal que, para $a_i < b_i$,

$$\lambda_d \left(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

λ_d é a **medida de Lebesgue** de $\mathbb{R}^d$.

Sejam $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espaços de medida. A σ -álgebra produto $\mathcal{E} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i$ é a menor σ -álgebra em $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ contendo os retângulos $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{E}_i$.

Teorema 1.36 (produto infinito de probabilidades)

Teorema 1.36 Se $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots$, é uma família enumerável de espaços de medida com μ_i uma probabilidade para cada i , então existe uma única probabilidade μ em $(E, \mathcal{E})$ tal que, para todo retângulo

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i).$$

Para uma prova e detalhes, ver o livro de Halmos.