

Convergência

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Teorema 3.12 (continuação)

(b) se $E(|X_n|) = +\infty$, então pelo menos uma das duas v.a.'s terminais

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n \quad \text{e} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$$

é q.c. infinita (i.e. uma delas pelo menos toma os valores $+\infty$ ou $-\infty$ q.c.).

Convergência Fraca de Medidas

Introduzimos agora uma noção de convergência de leis de probabilidade. Seja $(E, \mathbb{E})$ um espaço mensurável e $\mu, \mu_n, n \geq 1$, medidas em $(E, \mathbb{E})$. Uma forma típica (não a única) de definir uma convergência $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ é a seguinte: primeiro fixe uma classe $\mathbb{D}$ de funções mensuráveis $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e então defina que $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu \quad \text{para todo } f \in \mathbb{D}.$$

Claro, conforme a escolha da classe $\mathbb{D}$, obtemos diferentes tipos de convergência (possivelmente incomparáveis).

Na sequência, para simplificar a notação, às vezes escreveremos $\mu(f)$ em vez de $\int f d\mu$ (o que nos lembra que uma medida também pode ser vista como um funcional em funções, Proposição 1.24).

Convergência fraca

Definition (Definição 3.15)

Seja E um espaço topológico e $\mu, \mu_n, n \geq 1$ medidas finitas em $\mathcal{B}(E)$. Dizemos que $(\mu_n)_n$ converge para μ **fracamente** se e somente se para toda função $f \in C_b(E)$ (funções contínuas limitadas em E) tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu. \quad (3.10)$$

Uma primeira propriedade importante da convergência fraca é a seguinte.

Observação 3.16

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$, probabilidades no espaço topológico E ; seja $\Phi : E \rightarrow G$ um mapa contínuo para outro espaço topológico G e denotemos por ν_n, ν as imagens de μ_n e μ sob Φ respectivamente. Se $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente, então também $\nu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \nu$ fracamente.

De fato, se $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada contínua, então $f \circ \Phi$ também é limitada contínua $E \rightarrow \mathbb{R}$.

Logo, graças à Proposição 1.27 (integração em relação a uma medida imagem),

$$\nu_n(f) = \mu_n(f \circ \Phi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(f \circ \Phi) = \nu(f).$$

Convergência fraca

Assuma E ser um espaço métrico. Então o limite fraco é único.

Na verdade, se simultaneamente $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ e $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \nu$ fracamente, então necessariamente

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\nu \quad (3.11)$$

para toda $f \in C_b(E)$, e portanto μ e ν coincidem (Proposição 1.25).

Proposição 3.17

Seja $\mathfrak{D}$ um espaço vetorial de funções mensuráveis limitadas no espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ e sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$, probabilidades em $(E, \mathcal{E})$.

Então, para que a relação

$$\mu_n(g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(g) \quad (3.12)$$

valha para toda $g \in \mathfrak{D}$, é suficiente que (3.12) valha para toda função g pertencente a um conjunto H que é total em $\mathfrak{D}$.

Convergência fraca

Demonstração: Por definição, H é total em $\mathfrak{D}$ se e somente se o espaço vetorial $\mathcal{H}$ das combinações lineares de funções de H é denso em $\mathfrak{D}$ na norma uniforme.

Se (3.12) vale para toda $g \in H$, por linearidade também vale para toda $g \in \mathcal{H}$.

Seja $f \in \mathfrak{D}$ e seja $g \in \mathcal{H}$ tal que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$; portanto, para todo n

$$\int_E |f - g| d\mu_n \leq \epsilon, \quad \int_E |f - g| d\mu \leq \epsilon.$$

Seja agora n_0 tal que $|\mu_n(g) - \mu(g)| \leq \epsilon$ para $n \geq n_0$; então para $n \geq n_0$

$$|\mu_n(f) - \mu(f)| \leq |\mu_n(f) - \mu_n(g)| + |\mu_n(g) - \mu(g)| + |\mu(g) - \mu(f)| \leq 3\epsilon$$

e pela arbitrariedade de ϵ o resultado segue.

Se além disso E também é separável e localmente compacto, então temos o seguinte critério.

Proposição 3.18

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$, medidas finitas no espaço métrico localmente compacto separável E , então $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente se e somente se

- (a) $\mu_n(f) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu(f)$ para toda função contínua com suporte compacto,
- (b) $\mu_n(1) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu(1)$

Demonstração: Assuma que (a) e (b) valem e vamos provar que $(\mu_n)_n$ converge para μ fracamente, o recíproco sendo óbvio.

Lembre (Lema 1.26) que existe uma sequência crescente $(h_n)_n$ de funções contínuas com suporte compacto tal que $h_n \uparrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $f \in C_b(E)$, então $fh_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} f$ e as funções fh_k são contínuas e com suporte compacto.

Temos, para todo k

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu(f)| &= |\mu_n((1 - h_k + h_k)f) - \mu((1 - h_k + h_k)f)| \\ &\leq |\mu_n((1 - h_k)f)| + |\mu((1 - h_k)f)| + |\mu_n(fh_k) - \mu(fh_k)| \\ &\leq \|f\|_\infty \mu_n(1 - h_k) + \|f\|_\infty \mu(1 - h_k) + |\mu_n(fh_k) - \mu(fh_k)|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Convergência fraca

Temos, adicionando e subtraindo sabiamente,

$$\begin{aligned}\mu_n(1 - h_k) + \mu(1 - h_k) &= \mu_n(1) + \mu(1) - \mu_n(h_k) - \mu(h_k) \\ &= \mu_n(1) - \mu(1) + 2\mu(1) - 2\mu(h_k) + \mu(h_k) - \mu_n(h_k) \\ &= 2\mu(1 - h_k) + (\mu_n(1) - \mu(1)) + (\mu(h_k) - \mu_n(h_k))\end{aligned}\quad (3.14)$$

de modo que, voltando a (3.13),

$$\begin{aligned}&|\mu_n(f) - \mu(f)| \\ &\leq |\mu_n(fh_k) - \mu(fh_k)| + \|f\|_\infty (|\mu_n(h_k) - \mu(h_k)| + |\mu_n(1) - \mu(1)| + 2\mu(1 - h_k))\end{aligned}$$

Lembrando que as funções h_k e fh_k têm suporte compacto, se escolhermos k grande o suficiente para que $\mu(1 - h_k) \leq \epsilon$, temos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(f) - \mu(f)| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty$$

de onde o resultado segue devido à arbitrariedade de ϵ .

Observação

Juntando as Proposições 3.17 e 3.18, se E é um espaço métrico separável localmente compacto, para provar convergência fraca precisamos apenas verificar (3.10) para toda $f \in C_K(E)$ ou para toda $f \in C_0(E)$ (funções que se anulam no infinito) ou de fato qualquer família de funções que seja total em $C_0(E)$.

Se $E = \mathbb{R}^d$, uma família total que usaremos na sequência é a das funções ψ_σ como em (2.51) para $\psi \in C_K(\mathbb{R}^d)$ e $\sigma > 0$, que é densa em $C_0(\mathbb{R}^d)$ graças ao Lema 2.29.

Convergência

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$, probabilidades em $\mathbb{R}^d$ e assumamos que $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente.

Então claramente $\hat{\mu}_n(\theta) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(\theta)$: apenas note que para todo $\theta \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{\mu}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \theta \rangle} d\mu(x),$$

i.e. $\hat{\mu}(\theta)$ é a integral em relação a μ da função limitada contínua $x \mapsto e^{i\langle x, \theta \rangle}$.

Portanto, convergência fraca, para probabilidades em $\mathbb{R}^d$, implica convergência pontual das funções características.

O resultado seguinte afirma que a recíproca também vale.

Teorema (P. Lévy)

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$, probabilidades em $\mathbb{R}^d$. Então $(\mu_n)_n$ converge fracamente para μ se e somente se $\hat{\mu}_n(\theta) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}^d$.

Convergência fraca

Demonstração: Graças à Observação 3.19, basta provar que $\mu_n(\psi_\sigma) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu(\psi_\sigma)$ onde ψ_σ é como em (2.51) com $\psi \in C_K(\mathbb{R}^d)$. Graças a (2.53)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\sigma(x) d\mu_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) dy \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} e^{-i\langle\theta, y\rangle} \hat{\mu}_n(\theta) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}_n(\theta) H(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde

$$H(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) e^{-i\langle\theta, y\rangle} dy.$$

O integrando da integral do lado direito de (3.14) converge pontualmente para $\hat{\mu}H$ e é dominado em módulo por $\theta \mapsto (2\pi)^{-d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(y)| dy$. Podemos, portanto, aplicar o Teorema de Lebesgue, dando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\sigma(x) d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(\theta) H(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\sigma(x) d\mu(x),$$

Na verdade, P. Lévy provou um resultado muito mais profundo: se $(\hat{\mu}_n)_n$ converge pontualmente para uma função κ e se κ é contínua em 0, então κ é a função característica de uma probabilidade μ e $(\mu_n)_n$ converge fracamente para μ .

Provaremos este resultado mais forte no Teorema 6.21.

Convergência fraca

Se $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente, o que pode ser dito sobre o comportamento de $\mu_n(f)$ quando f não é limitada contínua? E em particular quando f é a função indicadora de um evento?

Teorema 3.21 (Teorema "Portmanteau")

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$ probabilidades no espaço métrico E . Então $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente se e somente se uma das seguintes propriedades vale.

(a) Para toda função semi-contínua inferiormente (s.c.i.) $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ limitada inferiormente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n \geq \int_E f d\mu. \quad (3.15)$$

(b) Para toda função semi-contínua superiormente (s.c.s.) $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ limitada superiormente

$$\overline{\lim} \int_E f d\mu_n \leq \int_E f d\mu. \quad (3.16)$$

Demonstração: Claramente (a) e (b) são equivalentes (se f é como em (a), então $-f$ é como em (b)) e juntas implicam convergência fraca, pois, se $f \in C_b(E)$, então a f podemos aplicar simultaneamente (3.15) e (3.16), obtendo (3.10).

Reciprocamente, assuma que $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente e que f é s.c.i. e limitada inferiormente.

Então (propriedade de funções s.c.i.) existe uma sequência crescente de funções contínuas limitadas $(f_k)_k$ tal que $\sup_k f_k = f$.

Como $f_k \leq f$ para todo k , temos

$$\int_E f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n$$

e, tomando o supremo em k nesta relação, pelo Teorema de Beppo Levi o termo do lado esquerdo aumenta para $\int_E f d\mu$ e temos (3.15).