

Complementos sobre Convergência

Cristian Coletti

Primeiro quadrimestre de 2026

Lema de Slutsky (3.45)

Sejam $Z_n, U_n, n \geq 1$, respectivamente v.a.'s com valores em $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{R}^m$ em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e suponhamos que $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z, U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} U$ onde U é uma v.a. constante tomando o valor $u_0 \in \mathbb{R}^m$ com probabilidade 1. Então

(a) $(Z_n, U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (Z, u_0).$

(b) Se $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ é um mapa contínuo então $\Phi(Z_n, U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \Phi(Z, u_0).$

Casos particulares

Em particular

(b1) se $d = m$ então $Z_n + U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z + u_0$;

(b2) se $m = 1$ (i.e. a sequência $(U_n)_n$ é real) então $Z_n U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z u_0$.

Prova de (a)

Se $\xi \in \mathbb{R}^d, \theta \in \mathbb{R}^m$, então a função característica de (Z_n, U_n) calculada em $(\xi, \theta) \in \mathbb{R}^{d+m}$ é

$$\mathbb{E} \left(e^{i\langle \xi, Z_n \rangle} e^{i\langle \theta, U_n \rangle} \right) = \mathbb{E} \left(e^{i\langle \xi, Z_n \rangle} e^{i\langle \theta, u_0 \rangle} \right) + \mathbb{E} \left[e^{i\langle \xi, Z_n \rangle} \left(e^{i\langle \theta, U_n \rangle} - e^{i\langle \theta, u_0 \rangle} \right) \right].$$

Continuação da prova

O primeiro termo do lado direito converge para $E(e^{i\langle\xi,Z\rangle}e^{i\langle\theta,u_0\rangle})$; será portanto suficiente provar que o outro termo tende a 0. De fato,

$$\begin{aligned} & \left| E[e^{i\langle\xi,Z_n\rangle}(e^{i\langle\theta,U_n\rangle} - e^{i\langle\theta,u_0\rangle})] \right| \\ & \leq E \left[\left| e^{i\langle\xi,Z_n\rangle}(e^{i\langle\theta,U_n\rangle} - e^{i\langle\theta,u_0\rangle}) \right| \right] \\ & = E \left(\left| e^{i\langle\theta,U_n\rangle} - e^{i\langle\theta,u_0\rangle} \right| \right) = E[f(U_n)], \end{aligned}$$

Conclusão da prova de (a)

onde $f(x) = |e^{i\langle\theta,x\rangle} - e^{i\langle\theta,u_0\rangle}|$; temos

$E[f(U_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(U)] = f(u_0) = 0$, pois f é uma função contínua limitada.

Segue de (a).