

Cálculo de Leis e Desigualdade de Jensen

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Exemplo 2.22 (continuação)

A lei conjunta de X e Y tem densidade

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}e^{-y} = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e mensurável, então

$$E[\phi(X, \frac{X}{Y})] = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \phi(x, \frac{x}{y}) e^{-x} e^{-y} dy.$$

Mudança de Variável

Com a mudança de variável $\frac{x}{y} = z$, $dy = -\frac{x}{z^2}dz$ na integral interna, temos

$$E[\phi(X, \frac{X}{Y})] = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \phi(x, z) \frac{x}{z^2} e^{-x} e^{-x/z} dz.$$

Logo, a lei conjunta procurada tem densidade

$$g(x, z) = \frac{x}{z^2} e^{-x(1+\frac{1}{z})}, \quad x > 0, z > 0.$$

Densidade Marginal de Z

A densidade de $Z = \frac{X}{Y}$ é a marginal segunda de g :

$$g_Z(z) = \int g(x, z) dx = \frac{1}{z^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+\frac{1}{z})} dx.$$

Esta integral pode ser calculada facilmente por partes, lembrando que a variável de integração é x e z é constante.

Reconhecimento da Densidade Gama

Mais esperto: reconhecer no integrando, a menos de constante, uma densidade $\text{Gama}(2, 1 + \frac{1}{z})$. Logo, a integral é igual a $\frac{1}{(1+\frac{1}{z})^2}$ e

$$g_Z(z) = \frac{1}{z^2(1 + \frac{1}{z})^2} = \frac{1}{(1 + z)^2}, \quad z > 0.$$

Funções Convexas

A integral de uma função mensurável com respeito a uma probabilidade (i.e., esperança matemática) goza de uma desigualdade de convexidade.

Uma função $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa se e somente se para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ e $x, y \in \mathbb{R}^m$ temos

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y). \quad (2.16)$$

Propriedade de Representação

Se ϕ é convexa e semi-contínua inferiormente (s.c.i.), então

$$\phi(x) = \sup_f f(x), \quad (2.17)$$

o supremo sendo tomado entre todas as funções afim-lineares f tais que $f \leq \phi$.

Observação: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-continua inferiormente em x_0 se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Teorema 2.23 (Desigualdade de Jensen)

Seja X uma v.a. m -dimensional integrável e $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa s.c.i. (resp. côncava e s.c.s.). Então $\phi(X)$ é s.c.i. (resp. s.c.s.) e

$$E[\phi(X)] \geq \phi(E[X]) \quad (\text{resp. } E[\phi(X)] \leq \phi(E[X])).$$

Além disso, se ϕ é estritamente convexa e X não é q.c. constante, a desigualdade é estrita.

Prova (parte 1)

Suponha primeiro $\phi(E(X)) < +\infty$. Um hiperplano cruzando o gráfico de ϕ em $x = E(X)$ é uma função afim da forma

$$f(x) = \langle \alpha, x - E(X) \rangle + \phi(E(X)).$$

Como ϕ é convexa, existe tal hiperplano minorizando ϕ , i.e.,

$$\phi(x) \geq \langle \alpha, x - E(X) \rangle + \phi(E(X)) \quad \text{para todo } x. \quad (2.18)$$

Prova (parte 2)

Portanto,

$$\phi(X) \geq \langle \alpha, X - E(X) \rangle + \phi(E(X)). \quad (2.19)$$

A v.a. do lado direito é integrável, logo $\phi(X)$ é s.c.i. Tomando a esperança em (2.19):

$$E[\phi(X)] \geq \langle \alpha, E(X) - E(X) \rangle + \phi(E(X)) = \phi(E(X)). \quad (2.20)$$

Prova (parte 3)

Se $\phi(E(X)) = +\infty$, seja f uma função afim minorizando ϕ ; então $f(X)$ é integrável e $\phi(X) \geq f(X)$, logo $\phi(X)$ é s.c.i. Além disso,

$$E[\phi(X)] \geq E[f(X)] = f(E(X)).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções afim f minorizando ϕ , graças a (2.17) obtemos $E[\phi(X)] \geq \phi(E(X))$.

Desigualdade de Hölder

De Jensen podemos derivar desigualdades clássicas.

Desigualdade de Hölder: Se $p, q > 0$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}. \quad (2.21)$$

Prova da Desigualdade de Hölder via Jensen

A função

$$\phi(x, y) = x^{1/p} y^{1/q}, \quad x, y \geq 0,$$

é côncava e s.c.s. Logo,

$$E(|XY|) = E[\phi(|X|^p, |Y|^q)] \leq \phi(E[|X|^p], E[|Y|^q]) = E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}$$

Caso Particular: Cauchy-Schwarz

O caso particular $p = q = 2$ dá a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$E(|XY|) \leq E(|X|^2)^{1/2} E(|Y|^2)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Desigualdade de Minkowski

Para todo $p \geq 1$,

$$E(|X + Y|^p)^{1/p} \leq E(|X|^p)^{1/p} + E(|Y|^p)^{1/p}. \quad (2.24)$$

Segue de Jensen aplicada à função côncava s.c.s.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} (x^{1/p} + y^{1/p})^p & x, y \geq 0 \\ -\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e às v.a.'s $|X|^p, |Y|^p$.

Relação entre Normas L^p

De Jensen deduzimos uma desigualdade entre normas L^p : se $p > q$, como $\phi(x) = |x|^{p/q}$ é convexa contínua,

$$\|X\|_p^p = E(|X|^p) = E[\phi(|X|^q)] \geq \phi(E[|X|^q]) = E(|X|^q)^{p/q}.$$

Tomando a raiz p -ésima:

$$\|X\|_p \geq \|X\|_q \quad (2.25)$$

i.e., a norma L^p é uma função crescente de p .

Dada uma v.a. m -dimensional X e $\alpha > 0$, seu **momento absoluto de ordem** α é $E(|X|^\alpha) = \|X\|_\alpha^\alpha$.

Seu **momento absoluto centrado de ordem** α é $E(|X - E(X)|^\alpha)$.

A **variância** de uma v.a. real X é seu momento centrado de segunda ordem:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]. \quad (2.26)$$

Fórmula Prática para a Variância

Lembrando que $E(X)$ é constante:

$$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] = E(X^2) - E(X)^2.$$

Logo,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2. \quad (2.27)$$

Esta é a fórmula usada na prática.

Propriedades da Variância

$$\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Os momentos de X dependem apenas de sua lei μ :

$$\mathbb{E}(|X|^\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \mu(dx),$$

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - \mathbb{E}(X)|^\alpha \mu(dx).$$

Desigualdade de Markov

Os momentos dão informação sobre a probabilidade de X tomar valores grandes. Isso é precisado pela desigualdade de Markov:

Para todo $t > 0$, $\alpha > 0$,

$$P(|X| > t) \leq \frac{E(|X|^\alpha)}{t^\alpha} \quad (2.28)$$

pois

$$E(|X|^\alpha) \geq E(|X|^\alpha \mathbf{1}_{\{|X| > t\}}) \geq t^\alpha P(|X| > t),$$

já que $|X|^\alpha \geq t^\alpha$ no evento $\{|X| > t\}$.