

Funções Características (continuação)

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre 2026

Exemplo 2.25 (c): Poisson

Para uma lei de Poisson com parâmetro λ :

$$\phi(\theta) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{i\theta k} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i\theta}} = e^{\lambda(e^{i\theta} - 1)}.$$

Exemplo 2.25 (d): Exponencial

Para uma exponencial de parâmetro λ :

$$\phi(\theta) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{i\theta x} dx.$$

Calculando,

$$\phi(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - i\theta}.$$

(Pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(i\theta - \lambda)} = 0$, já que seu módulo é $e^{-\lambda x}$.)

Continuidade da Função Característica

Temos

$$|\hat{\mu}(\theta) - \hat{\mu}(\theta_0)| \leq E(|e^{i(\theta, X)} - e^{i(\theta_0, X)}|).$$

Se $\theta \rightarrow \theta_0$, então $|e^{i(\theta, X)} - e^{i(\theta_0, X)}| \rightarrow 0$ e é limitada por 2. Pelo Teorema de Lebesgue,

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} |\hat{\mu}(\theta) - \hat{\mu}(\theta_0)| = 0.$$

Logo, $\hat{\mu}$ é contínua (na verdade uniformemente contínua).

Diferenciabilidade (caso unidimensional $m = 1$)

Pela Proposição 1.21, para diferenciar

$$\theta \mapsto \mathbb{E}[e^{i\theta X}] = \int e^{i\theta x} d\mu(x)$$

é suficiente que a derivada em θ seja limitada por uma função integrável. Aqui,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i\theta x} \right| = |x|.$$

Portanto, se X é integrável ($\mathbb{E}|X| < \infty$), $\hat{\mu}$ é diferenciável e

$$\hat{\mu}'(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{i\theta x} \mu(dx) = \mathbb{E}(iX e^{i\theta X}). \quad (2.41)$$

Diferenciabilidade de Ordem Superior

Se X tem momento de segunda ordem finito, $\hat{\mu}$ é duas vezes diferenciável e

$$\hat{\mu}''(\theta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{i\theta x} \mu(dx). \quad (2.42)$$

Por indução: se μ tem momento absoluto de ordem k finito, então $\hat{\mu}$ é k vezes diferenciável e

$$\hat{\mu}^{(k)}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{i\theta x} \mu(dx). \quad (2.43)$$

Proposição 2.26:

- 1 Se μ tem momento de ordem k finito, então $\hat{\mu}$ é k vezes diferenciável e (2.43) vale.
- 2 Se $\hat{\mu}$ é k vezes diferenciável e k é par, então μ tem momento de ordem k finito e (2.43) vale.

Prova (parte 2, caso $k = 2$)

Suponha $\hat{\mu}$ duas vezes diferenciável. Então

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\hat{\mu}(\theta) + \hat{\mu}(-\theta) - 2\hat{\mu}(0)}{\theta^2} = \hat{\mu}''(0).$$

Mas

$$\frac{2\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\theta) - \hat{\mu}(-\theta)}{\theta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{1 - \cos(\theta x)}{x^2 \theta^2} x^2 \mu(dx).$$

O integrando é positivo e converge para x^2 quando $\theta \rightarrow 0$.

Aplicação do Lema de Fatou

Pelo Lema de Fatou,

$$-\hat{\mu}''(0) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mu(dx).$$

Logo, μ tem momento de segunda ordem finito e, pela primeira parte,

$$\hat{\mu}''(\theta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{i\theta x} \mu(dx).$$

A prova para k par geral segue por indução.

Observação 2.27

Se k é par, é suficiente que $\hat{\mu}$ seja diferenciável k vezes na origem para garantir que o momento de ordem k de μ seja finito.

Para $\theta = 0$, (2.43) dá

$$\hat{\mu}^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mu(dx), \quad (2.46)$$

o que permite calcular os momentos derivando $\hat{\mu}$ em 0.

Caso Multidimensional

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ um multi-índice. Se

$$\int_{\mathbb{R}^m} |x|^{|\alpha|} \mu(dx) < +\infty,$$

então $\hat{\mu}$ é $|\alpha|$ vezes diferenciável e

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \theta^\alpha} \hat{\mu}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^m} (ix)^\alpha e^{i\langle \theta, x \rangle} \mu(dx).$$

Derivadas Primeiras e Segundas na Origem

Em particular,

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \theta_k}(0) = i \int_{\mathbb{R}^m} x_k \mu(dx),$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial \theta_k \partial \theta_l}(0) = - \int_{\mathbb{R}^m} x_k x_l \mu(dx).$$

Ou seja: o gradiente de $\hat{\mu}$ na origem é i vezes a esperança, e se μ é centrada, a Hessiana na origem é menos a matriz de covariância.

Exemplo 2.28: Função Característica da $N(0, 1)$

Se $\mu = N(0, 1)$,

$$\hat{\mu}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} e^{-x^2/2} dx. \quad (2.47)$$

Como μ tem média finita, por (2.41) e integração por partes:

$$\hat{\mu}'(\theta) = -\theta \hat{\mu}(\theta).$$

Solução da EDO

Portanto, $\hat{\mu}$ resolve a EDO linear

$$u'(\theta) = -\theta u(\theta), \quad u(0) = 1,$$

cuja solução é

$$\hat{\mu}(\theta) = e^{-\theta^2/2}.$$

Caso Geral Gaussiano

Se $Y \sim N(b, \sigma^2)$, então $Y = \sigma X + b$ com $X \sim N(0, 1)$. Por (2.40),

$$\hat{\mu}_Y(\theta) = e^{i\theta b} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}.$$

Densidade Gaussiana m -dimensional

Se $X_1, \dots, X_m$ são i.i.d. $N(0, \sigma^2)$, então X tem densidade

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x|^2}. \quad (2.48)$$

Sua função característica é

$$\phi_{\sigma}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2}. \quad (2.49)$$

Relação de Dualidade

De (2.48) e (2.49) temos

$$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sigma^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x|^2} e^{i\langle\theta,x\rangle} dx.$$

Trocando os papéis de x e θ , e substituindo σ por $1/\sigma$, obtemos

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x|^2} = \frac{\sigma^m}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} e^{i\langle\theta,x\rangle} d\theta.$$

Expressão Integral para a Densidade

Consequentemente,

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} e^{i\langle\theta,x\rangle} d\theta. \quad (2.50)$$

Convolução com Núcleo Gaussiano

Dada $\psi \in C_0(\mathbb{R}^m)$, defina

$$\psi_\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_\sigma(x - y)\psi(y)dy. \quad (2.51)$$

Lema 2.29: Para toda $\psi \in C_0(\mathbb{R}^m)$,

$$\psi_\sigma \xrightarrow[\sigma \rightarrow 0^+]{} \psi$$

uniformemente.