

Esperança Condicional

Cristian F. Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Introdução

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. A seguinte definição é bem conhecida.

Seja $B \in \mathcal{F}$ um evento não-negligenciável. A probabilidade condicional de P dado B é a probabilidade P_B em $(\Omega, \mathcal{F})$ definida como

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}. \quad (4.1)$$

O fato de que P_B é uma probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ é imediato.

Introdução

- ▶ Do ponto de vista da modelagem: no início sabemos que cada evento $A \in \mathcal{F}$ pode ocorrer com probabilidade $P(A)$. Se, posteriormente, adquirimos a informação de que o evento B ocorreu, devemos substituir a probabilidade P por P_B , a fim de levar em conta a nova informação.

Introdução

- ▶ Do ponto de vista da modelagem: no início sabemos que cada evento $A \in \mathcal{F}$ pode ocorrer com probabilidade $P(A)$. Se, posteriormente, adquirimos a informação de que o evento B ocorreu, devemos substituir a probabilidade P por P_B , a fim de levar em conta a nova informação.
- ▶ Seja X uma v.a. real e Z uma v.a. assumindo valores em um conjunto enumerável E tal que $P(Z = z) > 0$ para todo $z \in E$.

Introdução

Para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$ e todo $z \in E$, seja

$$n(z, A) = P(X \in A | Z = z) = \frac{P(X \in A, Z = z)}{P(Z = z)}.$$

A função de conjunto $A \mapsto n(z, A)$ é, para cada $z \in E$, uma probabilidade em $\mathbb{R}$: é a lei condicional de X dado $Z = z$. Esta probabilidade tem um significado intuitivo não muito diferente do anterior: $A \mapsto n(z, A)$ é a lei que é razoável atribuir a X se adquirirmos a informação de que o evento $\{Z = z\}$ ocorreu.

Introdução

A esperança condicional de X dado $Z = z$ é definida como a média, se existir, desta lei:

$$E(X|Z = z) = \int_{\mathbb{R}} xn(z, dx) = \frac{1}{P(Z = z)} \int_{\{Z=z\}} X dP = \frac{E(X1_{\{Z=z\}})}{P(Z = z)}.$$

Vamos estender estas noções para uma v.a. Z geral (isto é, sem a suposição de que Z assume no máximo valores enumeráveis).

Introdução

A ideia é caracterizar a quantidade $h(z) = E(X|Z = z)$ de uma forma que também faça sentido se Z não assumir os seus valores em um conjunto enumerável. Para todo $B \subset E$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\{Z \in B\}} h(Z) dP &= \sum_{z \in B} E(X|Z = z) P(Z = z) = \sum_{z \in B} E(X 1_{\{Z=z\}}) \\ &= E(X 1_{\{Z \in B\}}) = \int_{\{Z \in B\}} X dP,\end{aligned}$$

isto é, as integrais de $h(Z)$, que é $\sigma(Z)$ -mensurável, e de X nos eventos de $\sigma(Z)$ coincidem. Veremos que esta propriedade caracteriza a esperança condicional.

Esperança Condicional - Espaços L^2

Definição

$$L^2(\mathcal{F}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável, } \int |f|^2 d\mathbb{P} < \infty\}$$

$$L^2(\mathcal{G}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é } \mathcal{G}\text{-mensurável, } \int |f|^2 d\mathbb{P} < \infty\}$$

Estes são espaços de Hilbert com produto interno $\langle f, g \rangle = \int fg d\mathbb{P}$.
 $L^2(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{F})$ porque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ implica que funções $\mathcal{G}$ -mensuráveis são $\mathcal{F}$ -mensuráveis.

$L^2(\mathcal{G})$ é um Subespaço

Propriedades de Subespaço.

- **Fechamento sob adição:** Se $f, g \in L^2(\mathcal{G})$, então $f + g$ é $\mathcal{G}$ -mensurável e

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 < \infty$$

- **Fechamento sob multiplicação escalar:** Se $f \in L^2(\mathcal{G})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αf é $\mathcal{G}$ -mensurável e

$$\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2 < \infty$$

- **Função zero:** 0 é $\mathcal{G}$ -mensurável e $\|0\|_2 = 0$

Portanto $L^2(\mathcal{G})$ é um subespaço linear de $L^2(\mathcal{F})$. □

Demonstração do subespaço ser fechado

Teorema:

$L^2(\mathcal{G})$ é um subespaço fechado de $L^2(\mathcal{F})$.

Prova : Seja $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^2(\mathcal{G})$ e assumamos que $f_n \rightarrow f$ em $L^2(\mathcal{F})$. Lembre que convergência em L^2 implica convergência em Probabilidade e, que, esta última convergência implica na existência de uma subsequência f_{n_k} convergindo para f q.s. Afirmamos que $f \in L^2(\mathcal{G})$ pois para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, o evento $\{\lim_k f_{n_k} > a\}$ pode ser escrito como

$$\bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{k=l}^{+\infty} \bigcup_{l=k}^{+\infty} \{f_{n_l} > a + 1/m\}$$

Por fim, f_n converge a f em $L^2(\mathcal{F})$ e este é completo, $f \in L^2(\mathcal{F})$. Sendo que f $\mathcal{G}$ -mensurável concluímos que $f \in L^2(\mathcal{G})$. Isto é, $L^2(\mathcal{G})$ é fechado.

Teorema da Projeção Ortogonal

Teorema (Projeção Ortogonal). Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um subespaço fechado. Então para todo $x \in H$, existe um único $Px \in K$ tal que

$$\langle x - Px, y \rangle = 0 \quad \forall y \in K.$$

A aplicação $P : H \rightarrow K$ é linear e satisfaz $\|Px\| \leq \|x\|$.

Aplicação

Tome $H = L^2(\mathcal{F})$ e $K = L^2(\mathcal{G})$, que é fechado. Então temos uma projeção ortogonal

$$P : L^2(\mathcal{F}) \longrightarrow L^2(\mathcal{G}).$$

Esperança Condicional em L^2

Teorema (Esperança Condicional) em L^2

Para $X \in L^2(\mathcal{F})$, defina

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] := PX,$$

onde P é a projeção ortogonal sobre $L^2(\mathcal{G})$.

Prova

Para qualquer $G \in \mathcal{G}$, temos $1_G \in L^2(\mathcal{G})$ pois

$$\int 1_G^2 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(G) \leq 1 < \infty$$

Esperança Condicional

Pela propriedade de ortogonalidade:

$$\int_G (X - PX) d\mathbb{P} = \langle X - PX, 1_G \rangle = 0.$$

Logo

$$\int_G PX d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P} \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Assim PX satisfaz a propriedade que define $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

Estratégia para Extensão a L^1

Queremos construir $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ para $X \in L^1(\mathcal{F})$.

Estratégia

1. Tratar primeiro $X \geq 0$
2. Truncar: $X_n = X \wedge n = \min(X, n)$
3. $X_n \in L^\infty(\mathcal{F}) \subset L^2(\mathcal{F})$, então $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$ existe
4. Mostrar que $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$ cresce para um limite
5. Provar que o limite funciona para X
6. Estender para X com sinal por linearidade

Truncamento

Seja $X \geq 0$, $X \in L^1(\mathcal{F})$. Defina para $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n(\omega) := \min(X(\omega), n) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) \leq n \\ n & \text{se } X(\omega) > n \end{cases}$$

Propriedades

- ▶ $0 \leq X_n \leq n$, então $X_n \in L^\infty(\mathcal{F}) \subset L^2(\mathcal{F})$
- ▶ $X_n \uparrow X$ pontualmente quando $n \rightarrow \infty$
- ▶ Pela convergência monótona: $\mathbb{E}[X_n] \uparrow \mathbb{E}[X]$

Construindo a Sequência

Para cada n , como $X_n \in L^2(\mathcal{F})$, defina

$$Y_n := \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \in L^2(\mathcal{G}).$$

Lema (Monotonicidade) A sequência (Y_n) é não decrescente quase certamente.

Prova

Seja $G = \{Y_n > Y_{n+1}\} \in \mathcal{G}$. Então

$$\int_G Y_n d\mathbb{P} = \int_G X_n d\mathbb{P} \leq \int_G X_{n+1} d\mathbb{P} = \int_G Y_{n+1} d\mathbb{P}.$$

Assim $\int_G (Y_n - Y_{n+1}) d\mathbb{P} \leq 0$. Em G , $Y_n - Y_{n+1} > 0$, então a integral seria positiva a menos que $\mathbb{P}(G) = 0$. Portanto $Y_n \leq Y_{n+1}$ q.s.

Tomando o Limite

Como (Y_n) é não-decrescente quase certamente, defina

$$Y(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) \quad (\text{com } Y(\omega) = \infty \text{ onde o limite diverge}).$$

- ▶ Y é $\mathcal{G}$ -mensurável (limite pontual de funções -mensuráveis)
- ▶ Pela convergência monótona:

$$\mathbb{E}[Y] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] < \infty$$

- ▶ Logo Y é finita quase certamente e $Y \in L^1(\mathcal{G})$

Verificação da Propriedade que a Define

Para qualquer $G \in \mathcal{G}$, temos:

$$\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \right) d\mathbb{P}$$

Pela convergência monótona (já que $Y_n \uparrow Y$):

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G Y_n \, d\mathbb{P}$$

Pela definição de $Y_n = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G X_n \, d\mathbb{P}$$

Pela convergência monótona (já que $X_n \uparrow X$):

$$= \int_G X \, d\mathbb{P}$$

Assim Y satisfaz a propriedade requerida para $X \geq 0$.

Extensão para X com Sinal

Para um $X \in L^1(\mathcal{F})$ geral, escreva $X = X^+ - X^-$ onde

$$X^+ = \max(X, 0), \quad X^- = \max(-X, 0), \quad X^+, X^- \geq 0.$$

Teorema (Esperança Condicional para X com Sinal).

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] := \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{G}].$$

Prova

$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ é $\mathcal{G}$ -mensurável como diferença de funções $\mathcal{G}$ -mensuráveis.

Para qualquer $G \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \int_G \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} &= \int_G \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} - \int_G \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\ &= \int_G X^+ d\mathbb{P} - \int_G X^- d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Assim a propriedade é satisfeita.

Definição de Esperança Condicional

Definição: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e seja $\mathcal{G}$ uma sub-sigma-álgebra de $\mathcal{F}$. Seja X uma variável aleatória integrável. Então existe uma única V.A. tal que é

- ▶ $\mathcal{G}$ -mensurável
- ▶ e, tal que,

$$\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

para cada $G \in \mathcal{G}$.

Observação: Y é denotada por $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ e é a esperança condicional de X dada $\mathcal{G}$.

Esperança Condicional

Acabamos de ver que tal variável aleatória existe. A unicidade prova-se da seguinte forma.

Suponha que Y e Y' são duas V.As. satisfazendo a definição de Esperança condicional. Segue da definição que:

$$\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G Y' d\mathbb{P}$$

onde $G = \{Y' \leq Y\}$. Assim,

$$\int_G (Y - Y') d\mathbb{P} = 0.$$

Logo, $Y = Y'$ q.s.

Esperança Condicional

Observação Se X é integrável, então $Z = E(X|\mathcal{G})$ se e somente se

- (a) Z é integrável e $\mathcal{G}$ -mensurável.
- (b) $E(Z1_D) = E(X1_D)$ quando D varia sobre uma classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ que gera $\mathcal{G}$, estável sob interseções finitas e contém Ω .

Esperança Condicional

Prova: A família $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ de eventos D tais que $E(Z1_D) = E(X1_D)$ é uma classe monótona.

- ▶ Se $A, B \in \mathcal{M}$ com $A \subset B$, então $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
- ▶ Se $(D_n)_n \subset \mathcal{M}$ é crescente e $D = \bigcup_n D_n$, então $D \in \mathcal{M}$ (usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).

Pelo Teorema da Classe Monótona, $\mathcal{M}$ contém $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$.

Esperança Condicional

Observação O operador de esperança condicional é monótono. Se X e Y são semi-integráveis inferiores (l.s.i.) e $X \geq Y$ q.c., então

$$E(X|\mathcal{G}) \geq E(Y|\mathcal{G}) \quad \text{q.s.}$$

Equivalência entre Definições Conjuntista e Funcional

Teorema

Sejam $X, Y \in L^1$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\int_D Y dP = \int_D X dP$ para todo $D \in \mathcal{G}$.
2. $E[YW] = E[XW]$ para toda variável aleatória W limitada e $\mathcal{G}$ -mensurável.

Crítériode equivalência

Proof.

(2) $\implies$ (1): Seja $D \in \mathcal{G}$. Defina $W = \mathbb{I}_D$ (função indicadora). Como W é $\mathcal{G}$ -mensurável e limitada, temos $E[Y\mathbb{I}_D] = E[X\mathbb{I}_D]$, o que é equivalente a $\int_D Y \, dP = \int_D X \, dP$.

(1) $\implies$ (2): Utilizamos a "máquina padrão" da teoria da medida.

- ▶ **Indicadoras:** Por (1), $E[Y\mathbb{I}_D] = E[X\mathbb{I}_D]$.
- ▶ **Funções Simples:** Para $W = \sum a_i \mathbb{I}_{D_i}$, a linearidade garante que $E[YW] = \sum a_i E[Y\mathbb{I}_{D_i}] = \sum a_i E[X\mathbb{I}_{D_i}] = E[XW]$.
- ▶ **Funções Limitadas:** Qualquer W limitada e $\mathcal{G}$ -mensurável é o limite de funções simples W_n . Pelo Teorema da Convergência Dominada,
 $E[YW] = \lim E[YW_n] = \lim E[XW_n] = E[XW]$.



Propriedades da Esperança Condicional

Proposição 4.5 Sejam X, Y v.a.'s integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

- (a) $E(\alpha X + \beta Y | \mathcal{G}) = \alpha E(X | \mathcal{G}) + \beta E(Y | \mathcal{G})$ q.c.
- (b) $E[E(X | \mathcal{G})] = E(X)$.
- (c) Se $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, então $E[E(X | \mathcal{G}) | \mathcal{G}'] = E(X | \mathcal{G}')$ q.c.
- (d) Se Z é limitada e $\mathcal{G}$ -mensurável, então $E(ZX | \mathcal{G}) = Z E(X | \mathcal{G})$ q.c.
- (e) Se X é independente de $\mathcal{G}$, então $E(X | \mathcal{G}) = E(X)$ q.c.

Propriedades da Esperança Condicional

Prova dos três últimos pontos:

- (c) A v.a. $E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}']$ é $\mathcal{G}'$ -mensurável. Para W limitada e $\mathcal{G}'$ -mensurável, temos

$$E[W E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}')] = E[W E(X|\mathcal{G})] = E(WX).$$

- (d) $ZE(X|\mathcal{G})$ é $\mathcal{G}$ -mensurável. Para W limitada e $\mathcal{G}$ -mensurável, ZW também o é, então

$$E(WZX) = E[WZ E(X|\mathcal{G})].$$

- (e) $\omega \mapsto E(X)$ é constante e $\mathcal{G}$ -mensurável. Se W é $\mathcal{G}$ -mensurável, é independente de X e

$$E(WX) = E(W)E(X) = E[W E(X)].$$

Extensões e Convergência

É fácil estender a Proposição 4.5 para v.a.'s que são apenas l.s.i.
No entanto:

- ▶ (a) vale apenas se $\alpha, \beta \geq 0$ (caso contrário, $\alpha X + \beta Y$ pode não ser l.s.i.).
- ▶ (d) vale apenas se Z é limitada positiva (novamente, ZX pode não ser l.s.i.).

O próximo resultado diz respeito ao comportamento da esperança condicional em relação à convergência.

Convergência da esperança Condicional

Proposição 4.6 Sejam $X, X_n, n = 1, 2, \dots$ v.a.'s reais l.s.i. Então

- (a) (Beppo Levi) Se $X_n \uparrow X$ q.c., então $E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$ q.c.
- (b) (Fatou) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ q.c. e as X_n são limitadas inferiormente pela mesma v.a. integrável, então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n|\mathcal{G}) \geq E(X|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

- (c) (Lebesgue) Se $|X_n| \leq Z$ para alguma v.a. integrável Z e $X_n \rightarrow X$ q.c., então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

Convergência da esperança Condicional

- (d) (Desigualdade de Jensen) Se $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função convexa e semicontínua inferiormente e $X = (X_1, \dots, X_d)$ é uma v.a. d -dimensional integrável, então $\Phi(X)$ é l.s.i. e

$$E[\Phi(X)|\mathcal{G}] \geq \Phi(E(X|\mathcal{G})) \quad \text{q.c.}$$

onde $E(X|\mathcal{G})$ denota a v.a. d -dimensional com componentes $E(X_k|\mathcal{G})$, $k = 1, \dots, d$.

Convergência da esperança Condicional

Prova de (a): A sequência $(E(X_n|\mathcal{G}))_n$ é q.c. crescente. Seja $Z := \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n|\mathcal{G})$, que é $\mathcal{G}$ -mensurável. Para $D \in \mathcal{G}$, pelo Teorema de Beppo Levi,

$$\int_D Z \, dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D E(X_n|\mathcal{G}) \, dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D X_n \, dP = \int_D X \, dP.$$

Logo $Z = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

Prova de (b): Se $Y_n = \inf_{k \geq n} X_k$, então $Y_n \uparrow X$. Como $Y_n \leq X_n$, (a) implica

$$E(X|\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n|\mathcal{G}).$$

Convergência da esperança Condicional

Prova de (c): Consequência imediata de (b), aplicado tanto a X_n quanto a $-X_n$.

Prova de (d): Uma função convexa e semicontínua inferiormente Φ é o supremo de funções afins-lineares que a minoram. Se $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ é uma dessas funções, então

$$E[\Phi(X)|\mathcal{G}] \geq E[f(X)|\mathcal{G}] = f(E(X|\mathcal{G})).$$

Tomando o supremo sobre todas essas f , obtemos a desigualdade desejada.

Exemplos

Exemplo 4.7 Se $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ é a σ -álgebra trivial, então

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

A esperança matemática aparece, portanto, como um caso particular da esperança condicional.

Exemplo 4.8 Seja $B \in \mathcal{F}$ um evento com probabilidade estritamente positiva e $\mathcal{G} = \{B, B^c, \Omega, \emptyset\}$. Então $E(X|\mathcal{G})$ é constante em B e em B^c . Denotando esses valores por c_B e c_{B^c} , temos

$$c_B = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP, \quad c_{B^c} = \frac{1}{P(B^c)} \int_{B^c} X dP.$$

Em particular, $E(X|\mathcal{G})$ é igual a $\int X dP_B$ em B e a $\int X dP_{B^c}$ em B^c .

Observações Importantes

Observação 4.9 Se X é quadrado integrável, $E(X|\mathcal{G})$ é a melhor aproximação em L^2 de X por uma v.a. $\mathcal{G}$ -mensurável. Além disso, $E(X|\mathcal{G})$ e $X - E(X|\mathcal{G})$ são ortogonais. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$E(X^2) = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2] + E[E(X|\mathcal{G})^2],$$

e, portanto,

$$E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2] = E(X^2) - E[E(X|\mathcal{G})^2].$$

Esperança Condicional e Espaços L^p

Observação 4.10 Se $X = X'$ q.c., então $E(X|\mathcal{G}) = E(X'|\mathcal{G})$ q.c.

A esperança condicional está definida em classes de equivalência de v.a.'s, em particular em espaços L^p .

Pela desigualdade de Jensen (Proposição 4.6(d)) com $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, temos

$$E(|E(X|\mathcal{G})|^p) \leq E(|X|^p).$$

Logo, a esperança condicional é um operador linear contínuo $L^p \rightarrow L^p$ com norma ≤ 1 (é uma contração).

Além disso, se $X_n \xrightarrow{L^p} X$, então $E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{L^p} E(X|\mathcal{G})$.

Esperança Condicional dada uma Variável Aleatória

Se Y é uma v.a. tomando valores em um espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$, escrevemos $E(X|Y)$ em vez de $E[X|\sigma(Y)]$. Pelo critério de Doob, existe uma função mensurável $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E(X|Y) = g(Y)$ q.c. Denotamos essa função por

$$g(y) = E(X|Y = y).$$

Ela satisfaz

$$E[X\psi(Y)] = E[g(Y)\psi(Y)]$$

para toda função mensurável limitada $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema do Congelamento

Se X é $\mathcal{G}$ -mensurável e Z é independente de $\mathcal{G}$, então

$$E(XZ|\mathcal{G}) = X E(Z|\mathcal{G}) = X E(Z).$$

Este é um caso particular do seguinte lema.

Lema 4.11 (Lema do Congelamento) Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sejam $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma σ -álgebra e $X : \Omega \rightarrow E$ uma v.a. com valores em um espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ tal que X é $\mathcal{G}$ -mensurável. Seja $\Psi : E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\omega \mapsto \Psi(x, \omega)$ é integrável para cada x e $\omega \mapsto \Psi(X(\omega), \omega)$ é integrável. Suponha que $\Psi(x, \cdot)$ é independente de $\mathcal{G}$ para cada x . Então

$$E[\Psi(X, \cdot) | \mathcal{G}] = \Phi(X),$$

onde $\Phi(x) = E[\Psi(x, \cdot)]$.

4.2 Esperança Condicional - Exemplos

Exemplo

Se $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ é a σ -álgebra trivial, então

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

Na verdade, as únicas v.a.'s $\mathcal{G}$ -mensuráveis são constantes e, se $c = E(X|\mathcal{G})$, então a constante c é determinada pela relação $c = E[E(X|\mathcal{G})] = E(X)$. A esperança matemática aparece, portanto, como um caso particular da esperança condicional.

4.2 Esperança Condicional

Exemplo

Seja $B \in \mathcal{F}$ um evento com probabilidade estritamente positiva e seja $\mathcal{G} = \{B, B^c, \Omega, \emptyset\}$ a σ -álgebra gerada por B . Então $E(X|\mathcal{G})$, que é $\mathcal{G}$ -mensurável, é uma v.a. real que é constante em B e em B^c . Se denotarmos por c_B o valor de $E(X|\mathcal{G})$ em B , a partir da relação

$$c_B P(B) = E[1_B E(X|\mathcal{G})] = \int_B X dP$$

e pela relação similar para B^c , obtemos

$$c_B = \frac{\int_B X dP}{P(B)}, \quad c_{B^c} = \frac{\int_{B^c} X dP}{P(B^c)}.$$

Em particular, $E(X|\mathcal{G})$ é igual a $\int X dP_B$ em B , onde P_B é como em (4.1), e igual a $\int X dP_{B^c}$ em B^c .

Esperança Condicional

Observação: Como é evidente na prova do Teorema de existência, se X é quadrado integrável, então $E(X|\mathcal{G})$ é a melhor aproximação em L^2 de X por uma v.a. $\mathcal{G}$ -mensurável e, além disso, as v.a.'s

$$E(X|\mathcal{G}) \text{ e } X - E(X|\mathcal{G})$$

são ortogonais. Como consequência, como $X = (X - E(X|\mathcal{G})) + E(X|\mathcal{G})$, temos (teorema de Pitágoras)

$$E(X^2) = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2] + E[E(X|\mathcal{G})^2]$$

e a relação útil

$$E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2] = E(X^2) - E[E(X|\mathcal{G})^2]. \quad (4.6)$$

Esperança Condicional e espaços L^p

Observação

É imediato que, se $X = X'$ q.c., então $E(X|\mathcal{G}) = E(X'|\mathcal{G})$ q.c.:
para todo $D \in \mathcal{G}$ temos

$$E[E(X|\mathcal{G})1_D] = E(X1_D) = E(X'1_D) = E[E(X'|\mathcal{G})1_D]$$

e a propriedade segue pela Proposição 4.1 (b).

A esperança condicional é, portanto, definida em classes de equivalência de v.a.'s.

4.2 Esperança Condicional

A Proposição 4.6 (d) (Jensen), aplicada à função convexa $x \mapsto |x|^p$ com $p \geq 1$, dá

$$E(|E(X|\mathcal{G})|^p) \leq E[E(|X|^p|\mathcal{G})] = E(|X|^p). \quad (4.7)$$

Portanto, a esperança condicional é uma aplicação linear contínua $L^p \rightarrow L^p$ para $p \geq 1$; sua norma é na verdade ≤ 1 , ou seja, é uma contração. A imagem de L^p sob o operador $X \mapsto E(X|\mathcal{G})$ é o subespaço de L^p , que denotaremos por $L^p(\mathcal{G})$, formado pelas classes de equivalência de v.a.'s que contêm pelo menos um representante $\mathcal{G}$ -mensurável.

Em particular, se $p \geq 1$, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ implica $E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} E(X|\mathcal{G})$.