

Martingalas

Cristian Favio Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

- Considere um jogador que está participando de um jogo que progride sequencialmente ao longo do tempo.
- Em qualquer instante de tempo, a estratégia do jogador depende da informação acumulada disponível até aquele momento.
- Poderíamos chamar esse jogo de justo se, o ganho acumulado do jogador em qualquer momento, na média, não é nem mais nem menos do que era antes daquele instante. Esta ideia de um jogo justo será tornada precisa e nos levará à definição de um martingala.
- Levy (1937) introduziu o conceito de martingala na teoria da probabilidade, embora o termo "martingala" tenha sido introduzido por Ville (1939).

4.1 Definição e Exemplos

Definition (Filtração, sequência adaptada)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

- a) Uma sequência de sub- σ -corpos $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}$ de $\mathcal{A}$ é dita uma filtração se $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}$. Então $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}, P)$ é chamado espaço de probabilidade filtrado.
- b) Sejam $\{X_n\}_{n \geq 0}$ variáveis aleatórias. Dizemos que $(X_n, \mathcal{G}_n)$ é uma sequência adaptada ou que $\{X_n\}$ é adaptada a $\{\mathcal{G}_n\}$ se $\{\mathcal{G}_n\}$ é uma filtração, e X_n é $\mathcal{G}_n$ -mensurável para $n \geq 0$.

Definição de martingala

- Para quaisquer variáveis aleatórias $\{X_n\}$, $(X_n, \sigma(X_0, \dots, X_n))$ é sempre uma sequência adaptada. Em geral, $\mathcal{G}_n$ é a informação acumulada para o jogador até o tempo n .
- O ganho acumulado do jogador X_n no tempo n é então $\mathcal{G}_n$ -mensurável.

Definition (martingala)

Suponha que $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é adaptada. Então $\{X_n\}$ é dito um martingala com respeito à filtração $\{\mathcal{G}_n\}$ se para todo $n \in \mathbb{N}$:

- a) $E(|X_n|) < \infty$ e
- b) $E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n$ quase certamente.

Submartingala e Supermartingala

- Dizemos simplesmente que $(X_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala.
- É chamado de submartingala ou supermartingala conforme (b) seja substituída respectivamente por $E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) \geq X_n$ ou $E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) \leq X_n$ para todo n .
- Note que uma sequência integrável $\{X_n\}$ pode ser um martingala com respeito a mais de uma filtração.
- Em qualquer caso, se $\{X_n\}$ é um martingala então $E(X_n)$ é constante em n .

Teorema da Decomposição de Doob

A seguinte relação entre martingalas e submartingalas (ou supermartingalas) é fácil em nossa configuração, mas o resultado análogo para tempo contínuo é não trivial.

Theorem (Doob)

Seja $(X_n, \mathcal{G}_n)$ $n \geq 1$ um submartingala. Então X_n pode ser decomposto como

$$X_n = Y_n + A_n,$$

onde

- (i) $(Y_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala,*
- (ii) $A_{n+1} \geq A_n$ q.c. para todo $n \geq 1$,*
- (iii) $A_1 = 0$ q.c.,*
- (iv) A_n é $\mathcal{G}_{n-1}$ -mensurável para todo $n \geq 2$.*

Além disso, Y_n e A_n são unicamente determinados.

Decomposição para Supermartingalas

- Uma decomposição similar vale para supermartingalas.
- Para um submartingala $(X_n, \mathcal{G}_n)$, o par $\{(Y_n, A_n)\}$ dado no Teorema 4.1.1 é chamado sua decomposição de Doob.
- A sequência $\{A_n\}$ é chamada o compensador de $\{X_n\}$.

Prova do Teorema de Doob

Proof.

Seja $A_1 = 0$, e para $n \geq 2$, defina indutivamente

$$A_n = A_{n-1} + E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{G}_{n-1}),$$

$$Y_n = X_n - A_n.$$

Claramente, (iii) e (iv) valem, e portanto, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} E(Y_n | \mathcal{G}_{n-1}) &= E(X_n | \mathcal{G}_{n-1}) - A_n \\ &= E(X_n | \mathcal{G}_{n-1}) - A_{n-1} - E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{G}_{n-1}) \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} = Y_{n-1}, \end{aligned}$$

mostrando que (i) vale. □

Prova do Teorema de Doob (continuação)

Continuação.

Observe que

$$A_n - A_{n-1} = E(X_n | \mathcal{G}_{n-1}) - X_{n-1} \geq 0 \text{ q.c.},$$

mostrando que (ii) vale.

Agora suponha que $X_n = Z_n + B_n$ é uma decomposição tal que (i)-(iv) valham com A_n e Y_n substituídos por B_n e Z_n respectivamente. Então,

$$Y_n - Z_n = B_n - A_n, \quad n \geq 1.$$



Prova do Teorema de Doob (unicidade)

Continuação.

De (iv) segue que para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= E(B_n - A_n | \mathcal{G}_{n-1}) \\ &= E(Y_n - Z_n | \mathcal{G}_{n-1}) \\ &= Y_{n-1} - Z_{n-1} \quad (\text{por (i)}) \\ &= B_{n-1} - A_{n-1}. \end{aligned}$$

Usando (iii), segue indutivamente que $Y_n = Z_n$ q.c. para todo n , e a unicidade segue. □

- Sejam $\{\xi_n\}$ variáveis aleatórias independentes com médias finitas $\{\mu_n\}$.
- Seja $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $n \geq 1$. Seja $\mathcal{G}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ e $S_0 := 0$. Para todo $n \geq 1$, seja $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Então $(S_n, \mathcal{G}_n)$ é adaptada, e cada S_n tem média finita.
- Usando os fatos de que S_n é mensurável com respeito a $\mathcal{G}_n$, e ξ_{n+1} é independente de $\mathcal{G}_n$,

$$E(S_{n+1}|\mathcal{G}_n) = E(S_n + \xi_{n+1}|\mathcal{G}_n) = S_n + \mu_{n+1}.$$

Caminhada Aleatória (continuação)

- Se μ_n é zero para todo n , então $(S_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala.
- Se $\mu_n \geq 0$ para todo n , então $(S_n, \mathcal{G}_n)$ é um submartingala.
- Se $\mu_n \leq 0$ para todo n , então $(S_n, \mathcal{G}_n)$ é um supermartingala.
- Em qualquer caso, a sequência $(S_n - (\mu_1 + \cdots + \mu_n), \mathcal{G}_n)$ é um martingala.

Caminhada Aleatória (iid)

Se $\{\xi_n\}$ são i.i.d. então $\{S_n\}$ é chamada de caminhada aleatória. A caminhada é chamada simétrica simples se

$$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2.$$

Sejam $\{X_i\}$ i.i.d. com $E(X_i) = 0$ e $E(X_i^2) = 1$. Seja $S_n := X_1 + \dots + X_n$ e $\mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Mostre que $(S_n^2, \mathcal{G}_n)$ é um submartingala, e $(S_n^2 - n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala de média zero.

Exercício

Suponha que $\{X_i\}$ são independentes e $1 \leq E(e^{X_i}) < \infty$ para todo i . Seja

$$m_n = \prod_{i=1}^n E(e^{X_i}), \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad \mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 1.$$

Mostre que $(e^{S_n}, \mathcal{G}_n)$ é um submartingala e $(m_n^{-1}e^{S_n}, \mathcal{G}_n)$ é um martingala.

Exemplo: Jogo de Dobrar

Suponha que um apostador começa com capital X_0 . A cada tempo $n + 1$, $n \geq 0$, o apostador pega todo o ativo X_n , e então ou dobra seu ativo ou perde tudo, cada um com probabilidade $1/2$.

Assim, dado $(X_1, \dots, X_n)$, X_{n+1} é dado por

$$X_{n+1} = \begin{cases} 2X_n & \text{com prob. } 1/2 \\ 0 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

Então, $(X_n, \sigma(X_0, \dots, X_n))$ é um martingala.

Exercício: Martingala Produto

Suponha que $\{\xi_n\}$ são variáveis aleatórias positivas independentes com médias finitas $\{m_n\}$. Seja $X_0 = 1$ e

$$X_n := \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \text{para } n \geq 1.$$

Então mostre que $(M_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala, onde

$$M_n := \frac{X_n}{m_1 \dots m_n}.$$

Exemplo: Processo de Poisson

$(N_t)_{t \geq 0}$ é dito ser um processo de Poisson com média λ , se para todo $k \geq 1$ e todos $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$ ($j \leq k$) são independentes, variáveis de Poisson com parâmetros $\lambda(t_j - t_{j-1})$ respectivamente. Seja $X_n := N_n - n\lambda$ e $\mathcal{G}_n := \sigma(N_t : t \leq n)$, $n \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) &= E(N_{n+1} - (n+1)\lambda | \mathcal{G}_n) \\ &= E(N_{n+1} - N_n | \mathcal{G}_n) + N_n - (n+1)\lambda \\ &= \underbrace{E(N_{n+1} - N_n)}_{=\lambda} + N_n - (n+1)\lambda \\ &= N_n - n\lambda. \end{aligned}$$

Portanto $(X_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala.

Example (Martingala de Doob)

Seja Z uma v.a. integrável em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Então $(X_n := E(Z|\mathcal{G}_n), \mathcal{G}_n)$ é um martingala para qualquer filtração $\{\mathcal{G}_n\}$.

Para verificar isso, primeiro observe que para cada n , X_n é $\mathcal{G}_n$ -mensurável e integrável. Agora recorde a propriedade da torre (Teorema 3.1.2). Usando isso, para todo $n \geq 0$

$$E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) = E(E(Z|\mathcal{G}_{n+1})|\mathcal{G}_n) = E(Z|\mathcal{G}_n) = X_n.$$

Mais tarde veremos que para qualquer martingala $\{X_n\}$ com uma condição adicional, pode-se identificar um par $(Z, \mathcal{G}_n)$ de modo que ele se torne um martingala de Doob, $X_n = E(Z|\mathcal{G}_n)$ quase certamente.

Exemplo: Processo de Ramificação Bienaymé-Galton-Watson

Suponha que temos v.a.s i.i.d. $\{\xi_{n,k} : n \geq 1, k \geq 1\}$ que tomam valores em $\{0, 1, 2, \dots\}$ e têm média finita m . Seja $Z_0 := 1$ e para $n \geq 1$

$$Z_n := \begin{cases} 0 & \text{se } Z_{n-1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} & \text{se } Z_{n-1} > 0 \end{cases}$$

A ideia é que começamos com um único progenitor Z_0 , chamado de raiz. O k -ésimo progenitor na $(n-1)$ -ésima geração produz $\xi_{n,k}$ descendentes. Na n -ésima geração, o número total de progênie é Z_n .

Exemplo: Processo de Ramificação (continuação)

Seja $\mathcal{G}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_{j,k} : j \leq n, 1 \leq k < \infty)$. Então $(m^{-n}Z_n, \mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$ é um martingala. Isso é fácil de ver pelo seguinte cálculo simples.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m^{-(n+1)}Z_{n+1}|\mathcal{G}_n) &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{[Z_n>0]}(\xi_{n+1,1} + \cdots + \xi_{n+1,Z_n})|\mathcal{G}_n) \\ &= m^{-(n+1)}\mathbf{1}_{[Z_n>0]}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_n}\xi_{n+1,k}|\mathcal{G}_n\right) \\ &= m^{-(n+1)}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[Z_n=\ell]}\ell m = m^{-n}Z_n = X_n. \end{aligned}$$

Exemplo: Urna de Polya

No exemplo a seguir, introduzimos o modelo de urna mais simples e identificamos uma estrutura de martingala relevante.

Uma urna tem $b_0 > 0$ bolas pretas e $w_0 > 0$ bolas brancas. Uma bola é retirada ao acaso e devolvida à urna com uma nova bola adicional da mesma cor.

Este processo é repetido. O que acontece com as proporções das bolas pretas e brancas se continuarmos o processo?

Este esquema pode ser descrito pela seguinte construção probabilística.

Exemplo: Urna de Polya (continuação)

Sejam $\{U_n\}_{n \geq 1}$ v.a.s i.i.d. Uniforme $[0, 1]$. Sejam $B_0 := b_0 > 0$ e $W_0 := w_0 > 0$ dados. Defina

$$\xi_n := \mathbf{1}_{\{U_n \leq \frac{B_{n-1}}{B_{n-1} + W_{n-1}}\}},$$

$$B_n := B_{n-1} + \xi_n,$$

$$W_n := W_{n-1} + (1 - \xi_n).$$

Assim, $\xi_n = 1$ indica que a n -ésima retirada é preta. Então B_n e W_n são o número de bolas pretas e brancas na urna antes da $(n + 1)$ -ésima retirada.

Exemplo: Urna de Polya (continuação)

Claramente, $B_n + W_n = b_0 + w_0 + n$ (pois uma bola é adicionada após cada retirada). Seja $\mathcal{G}_n := \sigma(U_1, \dots, U_n)$, de modo que ξ_n , B_n e W_n são todos $\mathcal{G}_n$ -mensuráveis. Seja

$$X_n := \frac{B_n}{B_n + W_n} = \frac{B_n}{b_0 + w_0 + n}$$

a fração de bolas pretas no estágio n . É $\mathcal{G}_n$ -mensurável.

Exemplo: Urna de Polya (martingala)

Observe que

$$\begin{aligned}E(B_n|\mathcal{G}_{n-1}) &= B_{n-1} + E(\mathbf{1}_{\{U_n \leq X_{n-1}\}}|\mathcal{G}_{n-1}) \\&= B_{n-1} + X_{n-1} \\&= \frac{b_0 + w_0 + n}{b_0 + w_0 + n - 1} B_{n-1}.\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}E(X_n|\mathcal{G}_{n-1}) &= \frac{1}{b_0 + w_0 + n} E(B_n|\mathcal{G}_{n-1}) \\&= \frac{1}{b_0 + w_0 + n - 1} B_{n-1} = X_{n-1}.\end{aligned}$$

Logo $(X_n, \mathcal{G}_n)$ é um martingala.

Definição: Cadeia de Markov

Para nosso próximo exemplo de um martingala, precisamos dos conceitos de cadeia de Markov e caminhada aleatória simples em um grafo.

Definition (Cadeia de Markov)

Variáveis aleatórias $\{X_n\}$, tomando valores em $S = \{x_i, i \geq 1\}$, são ditas uma cadeia de Markov com espaço de estados S se, para todo $n \geq 2$ e $\{y_1, \dots, y_n\} \subset S$

$$P(X_n = y_n | X_1 = y_1, \dots, X_{n-1} = y_{n-1}) = P(X_n = y_n | X_{n-1} = y_{n-1}). \quad (4.1)$$

As probabilidades $p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), i, j \in S$ são conhecidas como probabilidades de transição. A equação (4.1) é conhecida como propriedade de Markov.

Verifique que a caminhada aleatória simples é uma cadeia de Markov e identifique seu espaço de estados e probabilidades de transição.

Definição: Caminhada Aleatória em Grafo

Definimos agora a caminhada aleatória simples em um grafo.

Definition

Suponha que $G = (V, E)$ é um grafo com um conjunto contável de vértices V e conjunto de arestas E . Para qualquer $i \in V$, seja $\deg(i) < \infty$ seu grau. Escrevemos $j \sim i$ se há pelo menos uma aresta de i para j . Seja $\{S_n\}$ uma sequência de v.a.s com valores em V em G .

Exemplo: Função Harmônica Discreta

Seja $\{S_n\}_{n \geq 0}$ uma caminhada aleatória simples em um grafo G com um conjunto contável de vértices V , onde cada vértice tem grau finito. Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica, isto é,

$$\varphi(i) = \frac{1}{\deg(i)} \sum_{j:j \sim i} \varphi(j)$$

para todo $i \in V$. Então $(\varphi(S_n), \mathcal{G}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n))_{n \geq 0}$ é um martingala.

Isso pode ser visto da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(S_{n+1})|\mathcal{G}_n) &= \frac{1}{\deg(S_n)} \sum_{j:j \sim S_n} \varphi(j) \quad (\text{usando a propriedade de Markov}) \\ &= \varphi(S_n).\end{aligned}$$