

Lei forte dos Grandes Números

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Proposição (Média finita é necessária). Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d. com média infinita: $\mathbb{E}|X_k| = \infty$. Então $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ satisfaz

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ converge para um número finito}\right) = 0.$$

Prova (esboço). $\mathbb{E}|X_1| = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n)$ diverge. Como X_k são identicamente distribuídos:

$$\mathbb{P}(|X_1| > n) = \mathbb{P}(|X_n| > n) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Lei Forte dos Grandes Números

Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) = \infty.$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(|X_n| > n \text{ i.o.}) = 1$.

Definimos dois eventos:

$$A := \{|X_n| > n \text{ i.o.}\} \quad (\mathbb{P}(A) = 1)$$

$$B := \left\{ \frac{S_n}{n} \text{ converge para um número finito} \right\}$$

Provamos que $A \cap B = \emptyset$. Se isto for verdade, então

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.$$

Lei Forte dos Grandes Números

Para provar que $A \cap B = \emptyset$, suponha que $A \cap B \neq \emptyset$.

Considere:

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)S_n - n(S_n + X_{n+1})}{n(n+1)} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

Então $\frac{S_n}{n(n+1)} \rightarrow 0$ e $\left| \frac{X_{n+1}}{n+1} \right| > 1$ i.o.

Para n grande, $\left| \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \right| > \frac{2}{3}$ i.o.

Logo $\frac{S_n}{n}$ não é de Cauchy e não converge, contradição. $\square$

Teorema (Lei Forte dos Grandes Números). Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ e $\mathbb{E}X_i = \mu$. Então, com $S_n = X_1 + \dots + X_n$:

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ quase certamente.}$$

Prova - Passo 0. Podemos assumir que $X_i \geq 0$. De fato, temos que:

$$X_i = X_i^+ - X_i^-$$

com $\mathbb{E}|X_i^+| < \infty$ e $\mathbb{E}|X_i^-| < \infty$.

Passo 1 (Truncamento). Definimos

$$\overline{X}_k = X_k \mathbf{1}_{\{X_k \leq k\}}.$$

Afirmamos que $\mathbb{P}(\overline{X}_k \neq X_k \text{ i.o.}) = 0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > k) \leq \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > x) dx = \mathbb{E}X_1 < +\infty.$$

Por Borel-Cantelli, a afirmação é verdadeira.

Se provarmos que $\frac{\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n}{n} \rightarrow \mu$ q.c., então $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu$ q.c.

Como a série de termo geral $\mathbb{P}[\bar{X}_k \neq X_k]$ é finita temos que esse evento ocorre um número finito de vezes com probabilidade 1.

Então, q.c., para k suficientemente grande $X_k = \bar{X}_k$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^{\bar{X}} - S_n^X}{n} < +\infty \text{ q.c.}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^{\bar{X}}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^X}{n}$$

Lei Forte dos Grandes Números - Lema da Variância

Lema

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{var}(\bar{X}_k)}{k^2} < +\infty.$$

Prova.

$$\text{var}(\bar{X}_k) \leq \mathbb{E}(\bar{X}_k^2) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{x \leq k\}} 2x \mathbb{P}(\bar{X}_k \geq x) dx.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{var}(\bar{X}_k)}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{x \leq k\}}}{k^2} 2x \mathbb{P}(X_1 \geq x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{k \geq x} \frac{1}{k^2} \right) 2x \mathbb{P}(X_1 \geq x) dx \end{aligned}$$

Lei Forte dos Grandes Números - Lema da Variância (cont.)

Como $\sum_{k \geq x} \frac{1}{k^2} \leq C / \max\{1, x\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{var}(\bar{X}_k)}{k^2} \leq \int_0^{\infty} 2C\mathbb{P}(X_1 \geq x)dx = 2C\mathbb{E}X_1 < +\infty. \quad \square$$

Passo 3 (Controle ao longo de uma subsequência). Seja $k(n) = \alpha^n$, com $\alpha > 1$ inteiro. Afirmamos que:

$$\frac{S_{k(n)}}{k(n)} \rightarrow \mu \quad \text{q.c.}$$

Para cada $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_{k(n)}}{k(n)} - \mu \right| > \varepsilon \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|S_{k(n)} - \mathbb{E}S_{k(n)}| > \varepsilon \cdot k(n)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{var}(S_{k(n)})}{(\varepsilon k(n))^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(n)^2} \sum_{k=1}^{k(n)} \text{var}(X_k). \end{aligned}$$

Lei Forte dos Grandes Números - Subsequência (cont.)

Trocando a ordem da soma:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \text{var}(X_k) \sum_{n:k(n) \geq k} \frac{1}{k(n)^2}.$$

Para a soma interna:

$$\sum_{n:\alpha^n \geq k} \frac{1}{\alpha^{2n}} \leq \frac{1}{(1 - \alpha^{-2})k^2}.$$

Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_{k(n)}}{k(n)} - \mu \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2(1 - \alpha^{-2})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{var}(X_k)}{k^2} < \infty.$$

Por Borel-Cantelli, $\frac{S_{k(n)}}{k(n)} \rightarrow \mu$ q.c.

Lei Forte dos Grandes Números - Preenchendo lacunas

Passo 4 (Preenchendo lacunas na sequência). Para $k(n) \leq k \leq k(n+1)$:

$$S_{k(n)} \leq S_k \leq S_{k(n+1)}$$

Como $k(n) = \alpha^n$:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{S_{k(n)}}{k(n)} = \frac{S_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{k(n+1)}}{k(n)} \leq \alpha \cdot \frac{S_{k(n+1)}}{k(n+1)}$$

Assim $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{S_{k(n)}}{k(n)} \rightarrow \frac{\mu}{\alpha}$ q.c.

Portanto:

$$\frac{\mu}{\alpha} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} \leq \alpha \mu \quad \text{q.c.}$$

Lei Forte dos Grandes Números - Conclusão

Como $\alpha > 1$ é arbitrário, deixando $\alpha \rightarrow 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} = \mu \quad \text{quase certamente.} \quad \square$$

Note que se $X > 0$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^m] &= \mathbb{E}\left[\int_0^X mt^{m-1} dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} mt^{m-1} \mathbf{1}_{\{t < X\}} dt\right] \\ &= \int_0^{+\infty} mt^{m-1} \mathbb{P}[t < X] dt\end{aligned}$$

É imediato que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[|X| > n] \leq \mathbb{E}[|X|] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}[|X| > t] dt \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[|X| > n]$$