

Lista de Exercícios - Probabilidade

Prof. Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Instruções

- A lista de exercícios será permanentemente atualizada.
- Data de entrega: Quarta-feira da última semana do quadrimestre.
- Resolva de forma clara e organizada
- Justifique todas as respostas

Álgebras

1. Sejam $(E_i, \mathcal{E}_i), i = 1, 2$ dois espaços mensuráveis e seja $\mathcal{C}$ a classe das somas finitas de retângulos $A \times B$, com $A \in \mathcal{E}_1$ e $B \in \mathcal{E}_2$. Por somas finitas de retângulos entendemos uniões finitas de retângulos que são disjuntas dois a dois. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma álgebra de subconjuntos de $E_1 \times E_2$.

Observação: Se tivermos $n \geq 2$ espaços mensuráveis $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, \dots, n$, o espaço mensurável produto $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ é definido de maneira análoga. Em particular, se $\Omega_1 = \dots = \Omega_n = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, então o espaço produto $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ é o espaço de Borel n -dimensional, onde $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (n fatores), e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de σ -álgebra de Borel n -dimensional. Os membros de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ são chamados de conjuntos de Borel n -dimensionais.

Agora consideramos o caso de infinitos (enumeráveis ou não) espaços mensuráveis $(\Omega_t, \mathcal{A}_t), t \in T$, onde o conjunto de índices T (não vazio) será geralmente a reta real ou sua parte não-negativa ou o intervalo unitário $(0, 1)$ ou $[0, 1]$.

Definição: O espaço produto de $\Omega_t, t \in T$, denotado por $\prod_{t \in T} \Omega_t$ ou Ω_T , é definido por $\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t = \{\omega = (\omega_t, t \in T); \omega_t \in \Omega_t, t \in T\}$.

Observação: Ao formar o ponto $\omega = (\omega_t, t \in T)$ com $\omega_t \in \Omega_t, t \in T$, assumimos tacitamente, invocando o axioma da escolha, que existe uma função em T para $\bigcup_{t \in T} \Omega_t$ com $\Omega_t \neq \emptyset, t \in T$, cujo valor em t, ω_t , pertence a Ω_t .

Para $T = \{1, 2\}$, $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2); \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. Seja $f : T \rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que $f(1) \in \Omega_1, f(2) \in \Omega_2$. Então $(f(1), f(2)) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Reciprocamente, qualquer $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ é o par (ordenado) de valores de uma função f em T para $\Omega_1 \cup \Omega_2$ com $f(1) \in \Omega_1, f(2) \in \Omega_2$; a saber, a função para a qual $f(1) = \omega_1, f(2) = \omega_2$. Assim, $\Omega_1 \times \Omega_2$ pode ser visto como a coleção de todas as funções f em T para $\Omega_1 \cup \Omega_2$ com $f(1) \in \Omega_1, f(2) \in \Omega_2$. Interpretação semelhante vale para qualquer coleção finita de $\Omega_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$, bem como qualquer coleção de $\Omega_t \neq \emptyset, t \in T \neq \emptyset$ (pelo axioma da escolha). Assim, $\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t = \{f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} \Omega_t; f(t) \in \Omega_t, t \in T\}$. Em particular, se $T = \mathbb{N}$ e $\Omega_t = \mathbb{N}, t \in T$, então $\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t$ é o conjunto de todas as funções reais definidas em $\mathbb{N}$.

Observação: Em muitas aplicações, tomamos $T = [0, 1], \Omega_t = \mathbb{R}, t \in T$, e consideramos subconjuntos de $\prod_{t \in T} \Omega_t$, tais como o conjunto de todas as funções contínuas, denotado por $\mathcal{C}([0, 1])$, ou o conjunto de todas as funções limitadas e contínuas à direita, denotado por $\mathcal{D}([0, 1])$.

A seguir, para qualquer inteiro positivo N , seja $T_N = \{t_1, \dots, t_N\}$ com $t_i \in T, i = 1, \dots, N$ e seja $A_{T_N} = \prod_{t \in T_N} A_t$. Então A_{T_N} é um retângulo em $\Omega_{t_1} \times \dots \times \Omega_{t_N}$.

Definição: O subconjunto $A_{T_N} \times \prod_{t \in T_N^c} \Omega_t = \prod_{t \in T_N} A_t \times \prod_{t \in T_N^c} \Omega_t$ de $\prod_{t \in T} \Omega_t$ é chamado de cilindro produto em $\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t$ com base A_{T_N} e lados $A_t \in \mathcal{A}_t, t \in T_N$.

2. Seja $\mathcal{C}$ a classe de todas as somas finitas de todos os cilindros produto. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma álgebra (de subconjuntos de $\prod_{t \in T} \Omega_t$).

Definição: A σ -álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é chamado de σ -álgebra produto de $\mathcal{A}_t, t \in T$ e é denotado por $\mathcal{A}_T = \prod_{t \in T} \mathcal{A}_t$. O par $(\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t, \mathcal{A}_T = \prod_{t \in T} \mathcal{A}_t)$ é chamado de espaço mensurável produto dos espaços (mensuráveis) $(\Omega_t, \mathcal{A}_t), t \in T$. O espaço $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, o espaço de Borel de dimensão (enumeravelmente) infinita, onde $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots$, é frequentemente de interesse especial. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ é a σ -álgebra de Borel de dimensão (enumeravelmente) infinita. Os membros de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ são chamados de conjuntos de Borel de dimensão (enumeravelmente) infinita.

σ -álgebras

3. Uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ é dita *gerada enumeravelmente* se existe uma subfamília enumerável $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$.

Prove que se E é um espaço métrico separável, então sua σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(E)$, é gerada enumeravelmente. Em particular, o mesmo vale para a σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ ou, mais geralmente, de qualquer espaço de Banach separável.

4. A σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ é gerada por cada uma das seguintes famílias de conjuntos:

- (a) Os intervalos abertos $]a, b[$ com $a < b$
- (b) Os intervalos semiabertos $]a, b]$ com $a < b$
- (c) As semirretas abertas $]a, \infty[$ com $a \in \mathbb{R}$
- (d) As semirretas fechadas $[a, \infty[$ com $a \in \mathbb{R}$

5. Seja E um espaço topológico e denotemos por $\mathcal{B}_0(E)$ a menor σ -álgebra de subconjuntos de E com respeito à qual todas as funções contínuas reais são mensuráveis. $\mathcal{B}_0(E)$ é a σ -álgebra de Baire.

- (a) Prove que $\mathcal{B}_0(E) \subset \mathcal{B}(E)$
- (b) Prove que se E é métrico separável então $\mathcal{B}_0(E)$ e $\mathcal{B}(E)$ coincidem.

6. Seja $(E, \mathcal{E})$ um espaço mensurável e $S \subset E$ (não necessariamente $S \in \mathcal{E}$). Prove que

$$\mathcal{E}_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{E}\}$$

é uma σ -álgebra de subconjuntos de S (a σ -álgebra traço de $\mathcal{E}$ em S).

7. Seja $(E, \mathcal{E})$ um espaço mensurável.

- (a) Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções reais mensuráveis. Prove que o conjunto

$$L = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}\}$$

é mensurável.

- (b) Assuma que as f_n tomam valores em um espaço métrico G . Usando uniões, interseções, complementares... descreva o conjunto de pontos x tais que a propriedade de Cauchy para a sequência $(f_n(x))_n$ é satisfeita e prove que, se E é completo, L também é mensurável neste caso.

Integração

8. Seja μ uma medida em $(E, \mathcal{E})$ e $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.

- (a) Prove que se f é integrável, então $|f| < +\infty$ q.t.p.
- (b) Prove que se f é positiva e

$$\int_E f d\mu = 0$$

então $f = 0$ μ -q.t.p.

- (c) Prove que se f é semi-integrável e se $\int_A f d\mu \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{E}$, então $f \geq 0$ q.t.p.

9. Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável que se anula fora de um conjunto desprezável N . Prove que f é integrável e que sua integral é zero.
10. (a) Seja $(w_n)_n$ uma sequência limitada de números positivos e seja, para $t > 0$

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{-tn}$$

É verdade que ϕ é diferenciável termo a termo, i.e., que para $t > 0$, ϕ é diferenciável e

$$\phi'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n w_n e^{-tn}?$$

- (b) Considere a mesma questão onde a sequência $(w_n)_n$ é limitada mas não necessariamente positiva.
- (c) E se $w_n = \sqrt{n}$?
- (d) E se $w_n = e^{\sqrt{n}}$?
11. (Contraexemplos)
- (a) Encontre um exemplo de um espaço de medida $(E, \mathcal{E}, \mu)$ e de uma sequência decrescente $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ tal que $\mu(A_n)$ não converge para $\mu(A)$ onde $A = \bigcap_n A_n$.
- (b) O Teorema de Beppo Levi requer a existência de uma função integrável f tal que $f \leq f_n$ para todo n . Dê um exemplo onde esta condição não é satisfeita e o enunciado do Teorema de Beppo Levi não é verdadeiro.

Continuidade absoluta de medidas

12. Sejam ν, μ medidas no espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ tais que $\nu \ll \mu$. Seja ϕ uma aplicação mensurável de E no espaço mensurável $(G, \mathcal{G})$ e sejam $\tilde{\nu}, \tilde{\mu}$ as respectivas imagens de ν e μ . Prove que $\tilde{\nu} \ll \tilde{\mu}$.

Tonelli-Fubini

13. O cálculo da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-tx} \sin x \, dx \tag{1}$$

para $t > 0$ não parece agradável. Mas como

$$\frac{1}{x} \sin x = \int_0^1 \cos(xy) \, dy$$

e usando Fubini... Calcule a integral em (1) e seu limite quando $t \rightarrow 0^+$.

14. Sejam $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Prove que

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy$$

define uma função em L^1 . Esta é a *convolução* de f e g , denotada $f * g$. Determine uma relação entre as normas L^1 de f , g e $f * g$.

Note que as duas funções $y \mapsto f(y)$ e $y \mapsto g(x-y)$ estão em L^1 mas, em geral, o produto de funções de L^1 não é integrável.

σ -álgebras e variáveis aleatórias

15. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_n$ uma sequência de eventos, cada um com probabilidade 1. Prove que a sua interseção $\bigcap_n A_n$ também tem probabilidade 1.
16. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma σ -álgebra P -trivial, i.e., tal que, para todo $A \in \mathcal{G}$, ou $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. Neste exercício provamos que uma v.a. X $\mathcal{G}$ -mensurável com valores em um espaço métrico separável E é constante q.c. Este fato já foi estabelecido no Teorema 2.15 no caso $E = \mathbb{R}^m$. Seja X uma v.a. com valores em E que é $\mathcal{G}$ -mensurável.
- (a) Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola $B_{x_n}(\frac{1}{n})$ centrada em algum $x_n \in E$ e com raio $\frac{1}{n}$ tal que $P(X \in B_{x_n}(\frac{1}{n})) = 1$.
- (b) Prove que existe uma sequência decrescente $(A_n)_n$ de conjuntos de Borel de E tal que $P(X \in A_n) = 1$ para cada n e tal que o diâmetro de A_n é $\leq \frac{2}{n}$.
- (c) Prove que existe um $x_0 \in E$ tal que $P(X = x_0) = 1$.
17. (a) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais independentes e seja

$$Z = \sup_{n \geq 1} X_n.$$

Suponha que, para algum $a \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq a) > 0$. Prove que $Z < +\infty$ q.c.

(b) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais independentes com X_n exponencial de parâmetro λ_n .

(b1) Suponha que $\lambda_n = \log n$. Prove que

$$Z := \sup_{n \geq 1} X_n < +\infty \quad \text{q.c.}$$

(b2) Suponha que $\lambda_n \equiv c > 0$. Prove que $Z = +\infty$ q.c.

18. Sejam X e Y v.a.'s reais independentes tais que $X + Y$ tem esperança matemática finita. Prove que tanto X quanto Y têm esperança matemática finita.

19. Sejam X e Y v.a.'s independentes de dimensão d com distribuições μ e ν respectivamente. Suponha que μ tem densidade f com respeito à medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ (nenhuma suposição é feita sobre a lei de Y).
- (a) Prove que $X + Y$ também tem densidade, digamos g , com respeito à medida de Lebesgue e calcule-a.
- (b) Prove que se f é k vezes diferenciável com derivadas limitadas até a ordem k , então g também é k vezes diferenciável (novamente qualquer que seja a lei de Y).
20. Seja μ uma probabilidade em $\mathbb{R}^d$.
- (a) Prove que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $M_1 > 0$ tal que $\mu(|x| \geq M_1) < \epsilon$.
- (b) Seja $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, i.e., contínua e tal que para todo $\epsilon > 0$ existe um $M_2 > 0$ tal que $|f(x)| \leq \epsilon$ para $|x| > M_2$. Prove que se

$$g(x) = \mu * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \mu(dy),$$

então g é contínua e $g(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Variáveis aleatórias e as suas leis

21. Um par de v.a.'s X, Y tem densidade conjunta

$$f(x, y) = (\theta + 1) \frac{e^{\theta x} e^{\theta y}}{(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{2 + \frac{1}{\theta}}}, \quad x > 0, y > 0$$

e $f(x, y) = 0$ caso contrário, onde $\theta > 0$. Calcule as densidades de X e de Y .

22. Sejam X, Y, Z v.a.'s independentes uniformes em $[0, 1]$.
- (a1) Calcule as leis de $-\log X$ e de $-\log Y$.
- (a2) Calcule a lei de $-\log X - \log Y$ e depois a de XY .
- (b) Prove que $P(XY < Z^2) = \frac{5}{9}$.
23. Seja Z uma v.a. exponencial com parâmetro λ e sejam $Z_1 = \lfloor Z \rfloor$, $Z_2 = Z - \lfloor Z \rfloor$, respetivamente as partes inteira e fracionária de Z .
- (a) Calcule as leis de Z_1 e de Z_2 .
- (b1) Calcule, para $0 \leq a < b \leq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, a probabilidade $P(Z_1 = k, Z_2 \in [a, b])$.
24. Neste exercício determinamos a lei imagem da distribuição uniforme na esfera sob a projeção no diâmetro norte-sul (ou, de fato, em qualquer diâmetro). Lembre-se que em coordenadas polares a parametrização da esfera $\mathbb{S}_2$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$z = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \cos \phi, \quad x = \sin \theta \sin \phi$$

onde $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. θ é a colatitude (i.e., a latitude mas com valores em $[0, \pi]$ em vez de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) e ϕ a longitude. A medida de Lebesgue da esfera, normalizada para que a medida total seja igual a 1, é $f(\theta, \phi) d\theta d\phi$, onde

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta \quad (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]. \quad (2.84)$$

Consideremos o mapa $\mathbb{S}_2 \rightarrow [-1, 1]$ definido como $(x, y, z) \mapsto z$, i.e., a projeção de $\mathbb{S}_2$ no diâmetro norte-sul.

Probabilidade condicionais, leis de variáveis aleatórias e transformadas de Laplace e de Fourier

25. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade, e X e Z v.a.'s exponenciais independentes de parâmetro λ . Definamos em $(\Omega, \mathcal{F})$ a nova medida

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \frac{\lambda}{2}(X + Z),$$

i.e., $\mathbf{Q}(A) = \frac{\lambda}{2} \mathbf{E}[(X + Z)\mathbf{1}_A]$.

- (a) Prove que $\mathbf{Q}$ é uma probabilidade e que $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$.
- (b) Calcule $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(XZ)$.
- (c1) Calcule a lei conjunta de X e Z com respeito a $\mathbf{Q}$. X e Z também são independentes com respeito a $\mathbf{Q}$?
- (c2) Quais são as leis de X e de Z sob $\mathbf{Q}$?
26. (a) Sejam X, Y v.a.'s reais tendo densidade conjunta f com respeito à medida de Lebesgue. Prove que tanto XY quanto $\frac{X}{Y}$ têm uma densidade com respeito à medida de Lebesgue e calcule-a.
- (b) Sejam X, Y v.a.'s independentes com distribuições Gama (α, λ) e Gama (β, λ) , respetivamente.
- (b1) Calcule a lei de $W = \frac{X}{Y}$.
- (b2) Esta lei não depende de λ . Era de se esperar?
- (b3) Para quais valores de p tem W um momento finito de ordem p ? Calcule esses momentos.
- (c1) Sejam X, Y, Z v.a.'s independentes com distribuição $N(0, 1)$. Calcule as leis de

$$W_1 = \frac{X^2}{Z^2 + Y^2}$$

e de

$$W_2 = \frac{|X|}{\sqrt{Z^2 + Y^2}}.$$

- (c2) Calcule a lei de $\frac{X}{Y}$.
27. Dadas duas probabilidades μ, ν num espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$, a entropia relativa (ou divergência de Kullback-Leibler) de ν em relação a μ é definida como

$$H(\nu; \mu) = \int_E \log \frac{d\nu}{d\mu} \nu(dx) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} \mu(dx)$$

se $\nu \ll \mu$ e $H(\nu; \mu) = +\infty$ caso contrário.

- (a) Prove que $H(\nu; \mu) \geq 0$ e que $H(\nu; \mu) > 0$ a menos que $\nu = \mu$. Além disso, H é uma função convexa de ν .
- (b) Seja $A \in \mathcal{E}$ um conjunto tal que $0 < \mu(A) < 1$ e $d\nu = \frac{1}{\mu(A)} \mathbf{1}_A d\mu$. Calcule $H(\nu; \mu)$ e $H(\mu; \nu)$ e note que $H(\nu; \mu) \neq H(\mu; \nu)$.
- (c) Seja $\mu = B(n, p)$ e $\nu = B(n, q)$ com $0 < p, q < 1$. Calcule $H(\nu; \mu)$.
- (d) Calcule $H(\nu; \mu)$ quando ν e μ são exponenciais de parâmetros ρ e λ , respectivamente.
- (e) Sejam $\nu_i, \mu_i, i = 1, \dots, n$ probabilidades nos espaços mensuráveis $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Prove que, se $\nu = \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ e $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$, então

$$H(\nu; \mu) = \sum_{i=1}^n H(\nu_i; \mu_i).$$

28. (Funções características são positivas definidas)] Uma função $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se positiva definida se, para toda a escolha de $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, a matriz complexa $(f(x_h - x_k))_{h,k}$ é positiva definida, i.e., Hermitiana e tal que

$$\sum_{h,k=1}^n f(x_h - x_k) \xi_h \overline{\xi_k} \geq 0 \quad \text{para todo } \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}.$$

Prove que as funções características são positivas definidas.

29. (Caracterização de Stein da lei Gaussiana)] (a) Seja $Z \sim N(0, 1)$. Prove que

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)] \quad \text{para toda } f \in C_b^1 \quad (\star)$$

onde C_b^1 denota o espaço vetorial das funções contínuas limitadas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com derivada limitada.

(b) Seja Z uma v.a. real satisfazendo $(\star)$. Prove que $Z \sim N(0, 1)$.

30. Sejam μ, ν probabilidades em $\mathbb{R}$ tais que todos os seus momentos coincidem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\nu(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

e suponha-se, adicionalmente, que a sua transformada de Laplace é finita numa vizinhança de 0. Então $\mu = \nu$.

31. Sejam μ e ν probabilidades em $\mathbb{R}$ e designem por L_μ e L_ν as suas transformadas de Laplace, respetivamente. Suponha que $L_\mu = L_\nu$ num intervalo aberto $]a, b[$.

(a) Suponha $a < 0 < b$. Prove que $\mu = \nu$.

(b1) Seja $a < \gamma < b$ e

$$d\mu_\gamma(x) = \frac{e^{\gamma x}}{L_\mu(\gamma)} d\mu(x), \quad d\nu_\gamma(x) = \frac{e^{\gamma x}}{L_\nu(\gamma)} d\nu(x).$$

Calcule as transformadas de Laplace L_{μ_γ} e L_{ν_γ} e prove que $\mu_\gamma = \nu_\gamma$.

(b2) Prove que $\mu = \nu$ também se $0 \notin]a, b[$.

32. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais convergindo para X em L^p , $p \geq 1$.

(a) Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

(b) Prove que se duas sequências $(X_n)_n$, $(Y_n)_n$, definidas no mesmo espaço de probabilidade, convergem em L^2 para X e Y respectivamente, então a sequência produto $(X_n Y_n)_n$ converge para XY em L^1 .

(c1) Prove que se $X_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} X$ em L^2 então também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = \text{Var}(X).$$

(c2) Prove que se $(X_n)_n$ e X tomam valores em $\mathbb{R}^d$ e $X_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} X$ em L^2 , então as matrizes de covariância convergem.

33. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e δ um número real. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq \delta\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \geq \delta \right\}.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n < \delta\} \subset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \leq \delta \right\}.$$

34. (a) Seja X uma v.a. uniforme em $[0, 1]$ e seja

$$A_n = \{X \leq \frac{1}{n}\}.$$

(a1) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

(a2) Calcule $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$.

(b) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s independentes uniformes em $[0, 1]$.

(b1) Seja

$$B_n = \{X_n \leq \frac{1}{n}\}.$$

Calcule $P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n)$.

(b2) E se

$$B_n = \{X_n \leq \frac{1}{n^2}\}?$$

35. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s independentes com lei exponencial de parâmetro $a_n = (\log(n+1))^\alpha$, $\alpha > 0$. Note que a sequência $(a_n)_n$ é crescente, de modo que as v.a.'s X_n "tornam-se menores" à medida que n aumenta.

(a) Determine $P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq 1\})$ conforme o valor de α .

(b1) Calcule $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ conforme o valor de α .

(b2) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ conforme o valor de α .

(c) Para quais valores de α (lembre que $\alpha > 0$) a sequência $(X_n)_n$ converge q.c.?

36. Seja $(Z_n)_n$ uma sequência de v.a.'s positivas i.i.d.

(a) Prove as desigualdades

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_1 \geq n) \leq E(Z_1) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_1 \geq n).$$

(b) Prove que

(b1) se $E(Z_1) < +\infty$ então $P(Z_n \geq n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

(b2) se $E(Z_1) = +\infty$ então $Z_n \geq n$ infinitas vezes com probabilidade 1.

(c) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais i.i.d. e seja

$$x_2 = \sup\{\theta; E(e^{\theta X_n}) < +\infty\}$$

a abscissa de convergência direita da transformada de Laplace das X_n .

(c1) Prove que se $x_2 < +\infty$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{x_2}$$

com a interpretação $\frac{1}{x_2} = +\infty$ se $x_2 = 0$.

(c2) Suponha que $X_n \sim N(0, 1)$. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}}.$$

37. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. tais que $0 < E(|X_1|) < +\infty$. Para cada $\omega \in \Omega$ consideremos a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) x^n$$

e seja $R(\omega) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega)|^{1/n})^{-1}$ o seu raio de convergência.

(a) Prove que R é uma v.a. constante q.c.

(b) Prove que existe um $a > 0$ tal que

$$P(|X_n| \geq a \text{ para infinitos índices } n) = 1$$

e deduza que $R \leq 1$ q.c.

(c) Seja $b > 1$. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq b^n) < +\infty$ e deduza o valor de R q.c.

38. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s com valores no espaço métrico E . Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ em probabilidade se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{d(X_n, X)}{1 + d(X_n, X)} \right] = 0. \quad (3.44)$$

39. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(|X_k|) < +\infty. \quad (3.45)$$

(a) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k \quad (3.46)$$

converge em L^1 .

(b1) Prove que a série $\sum_{k=1}^{\infty} X_k^+$ converge q.c.

(b2) Prove que em (3.46) a convergência também ocorre q.c.

40. Seja $(E, \mathcal{B}(E))$ um espaço topológico e ρ uma medida σ -finita em $\mathcal{B}(E)$. Sejam $f_n, n \geq 1$, densidades com respeito a ρ e seja $d\mu_n = f_n d\rho$ a probabilidade em $(E, \mathcal{B}(E))$ com densidade f_n em relação a ρ .

(a) Suponha que $f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f$ em $L^1(\rho)$.

(a1) Prove que f é ela própria uma densidade.

(a2) Prove que, se $d\mu = f d\rho$, então $\mu_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$ fracamente e além disso, para todo $A \in \mathcal{B}(E)$, $\mu_n(A) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu(A)$.

(b) Em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ seja

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \cos(2n\pi x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b1) Prove que as f_n 's são densidades de probabilidade com respeito à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

(b2) Prove que as probabilidades $d\mu_n(x) = f_n(x)dx$ convergem fracamente para uma probabilidade μ com densidade f a ser determinada.

(b3) Prove que a sequência $(f_n)_n$ não converge para f em L^1 (com respeito à medida de Lebesgue).

41. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s tendo respectivamente uma lei geométrica de parâmetro $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Mostre que a sequência $(\frac{1}{n}X_n)_n$ converge em lei e determine o seu limite.

42. (a) Seja μ_n a probabilidade em $\mathbb{R}$

$$\mu_n = (1 - a_n)\delta_0 + a_n\delta_n$$

onde $0 \leq a_n \leq 1$. Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ então $(\mu_n)_n$ converge fracamente e calcule o seu limite.

(b) Construa um exemplo de uma sequência $(\mu_n)_n$ convergindo fracamente mas tal que as médias ou as variâncias dos μ_n não converjam para a média e a variância do limite (veja no entanto o Exercício 3.30 abaixo).

- (c) Prove que, em geral, se $X_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} X$ em lei então $\liminf_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|) \geq E(|X|)$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n^2) \geq E(X^2)$.

43. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade.

- (a) Seja $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ uma sequência de eventos e suponha que, para algum $\alpha > 0$, $P(A_n) \geq \alpha$ para infinitos índices n . Prove que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \alpha.$$

- (b) Seja Q outra probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $Q \ll P$. Prove que, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $A \in \mathcal{F}$, se $P(A) \leq \delta$ então $Q(A) \leq \epsilon$.

44. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. com $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$ e seja $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Calcule os limites em lei das sequências

- (a) $(\sqrt{n} \sin \bar{X}_n)_n$
- (b) $(\sqrt{n}(1 - \cos \bar{X}_n))_n$
- (c) $(n(1 - \cos \bar{X}_n))_n$