

Variáveis Aleatórias, Leis, Esperança

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Espaço de Probabilidade e Variável Aleatória

Um espaço de probabilidade é uma tripla ou trinca $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ onde $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável e P uma probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$.

Uma **variável aleatória (v.a.)** é uma aplicação mensurável definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com valores num espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$.

Em muitas situações $(E, \mathcal{E})$ será um entre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ ou $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ e falaremos, respectivamente, de v.a.'s reais, numéricas, m -dimensionais ou complexas.

Lei ou Distribuição

A **lei** ou **distribuição** da v.a. $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ é a imagem de P por X , i.e., a probabilidade μ em $(E, \mathcal{E})$ definida por

$$\mu(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega; X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Escreveremos $P(X \in A)$ como abreviação de $P(\{\omega; X(\omega) \in A\})$ e escreveremos $X \sim Y$ ou $X \sim \mu$ para indicar que X e Y têm a mesma distribuição ou que X tem lei μ , respectivamente.

Se X é real, sua **função de distribuição** F é a função de distribuição de μ . Neste caso podemos tomar F como a função crescente e contínua à direita

$$F(x) = \mu([-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

Theorem (Unicidade da Função de Distribuição)

Se $F_{\mu} = F_{\mu'}$, então $\mu = \mu'$.

Demonstração.

Seja $\mathcal{J}$ a família de intervalos da forma $(a, b]$ que é estável por intersecções. Como $\mathcal{J}$ gera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, é suficiente mostrar que μ e μ' coincidem em $\mathcal{J}$.

Para $a < b$, temos:

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\mu((a, b]) &= \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) \\ &= \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a]) \\ &= F_{\mu}(b) - F_{\mu}(a) \\ &= F_{\mu'}(b) - F_{\mu'}(a) \\ &= \mu'((a, b])\end{aligned}$$

Propriedades da Função de Distribuição

Theorem (Propriedades de F_μ)

Seja F_μ a função de distribuição de μ . Então:

- a) F_μ é crescente. Portanto, existem os limites laterais:

$$F_\mu(t-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \uparrow t, s < t} F_\mu(s) \quad \text{e} \quad F_\mu(t+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \downarrow t, s > t} F_\mu(s)$$

$$\text{e } F_\mu(t-) \leq F_\mu(t) \leq F_\mu(t+).$$

- b) F_μ é contínua à direita: $F_\mu(t+) = F_\mu(t)$ para todo t .

- c) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_\mu(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\mu(t) = 1$.

Demonstração - Parte a)

a) Monotonicidade.

Para $s < t$, temos $(-\infty, s] \subseteq (-\infty, t]$. Portanto:

$$\mathbf{F}_\mu(s) = \mu((-\infty, s]) \leq \mu((-\infty, t]) = \mathbf{F}_\mu(t).$$

A existência dos limites laterais segue da monotonicidade (ver Rudin, 1975). A desigualdade

$$\mathbf{F}_\mu(t-) \leq \mathbf{F}_\mu(t) \leq \mathbf{F}_\mu(t+)$$

é consequência direta da definição dos limites laterais e da monotonicidade. □

Demonstração - Parte b)

b) Continuidade à direita.

Seja $t_n \downarrow t$ (sequência decrescente convergindo para t). Então $(-\infty, t_n] \downarrow (-\infty, t]$.

Pela continuidade da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\mu(t) &= \mu((-\infty, t]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, t_n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_\mu(t_n) \\ &= \mathbf{F}_\mu(t+)\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{F}_\mu$ é contínua à direita. □

Demonstração - Parte c)

c) Limites no infinito.

Quando $n \rightarrow \infty$:

- $(-\infty, -n] \downarrow \emptyset$
- $(-\infty, n] \uparrow \mathbb{R}$

Pela continuidade da probabilidade e monotonicidade de $\mathbf{F}_\mu$:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{F}_\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu(\emptyset) = 0$$

Para o limite superior:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}_\mu(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}_\mu(\lfloor t \rfloor) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_\mu(n) = \mu(\mathbb{R}) = 1$$

onde $\lfloor t \rfloor$ é a parte inteira de t .



Observações Adicionais

- Para $t_n \uparrow t$ (estritamente crescente), temos $(-\infty, t_n] \uparrow (-\infty, t)$, o que implica:

$$\mathbf{F}_\mu(t-) = \mu((-\infty, t))$$

Definição - Probabilidade Discreta

Definition (1.38)

Uma probabilidade P em $\mathbb{R}$ é **discreta** se existe um conjunto contável C tal que $P(C) = 1$.

- Probabilidades discretas são combinações convexas finitas ou contáveis de massas pontuais.
- Suas funções de distribuição aumentam apenas por meio de saltos, em vez de "suavemente".

Example

A distribuição de Poisson com parâmetro 1 é um exemplo chave de distribuição discreta.

Caracterizações de Probabilidades Discretas

Theorem (1.39)

São equivalentes para cada probabilidade P em $\mathbb{R}$:

- a) P é discreta.
- b) Existem uma sequência real (t_i) e números p_i com $p_i > 0$ para cada i e $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ tais que

$$P = \sum_i p_i \epsilon_{t_i}$$

- c) Existem uma sequência real (t_i) e números p_i com $p_i > 0$ para cada i e $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ tais que

$$F_P(t) = \sum_i p_i \mathbf{1}(t_i \leq t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Demonstração do Teorema 1.39 ($a \Rightarrow b$)

a) $\Rightarrow$ b).

Seja $C = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto contável com $P(C) = 1$. Então, para cada conjunto de Borel B :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_i P(B \cap \{t_i\}) \\ &= \sum_{t_i \in B} P(\{t_i\}) \\ &= \sum_i P(\{t_i\}) \epsilon_{t_i}(B) \end{aligned}$$

Portanto, b) vale com $p_i = P(\{t_i\})$. □

Demonstração do Teorema 1.39 ($b \Rightarrow c, c \Rightarrow a$)

$b) \Rightarrow c)$.

Para cada t :

$$\mathbf{F}_P(t) = \sum_i p_i \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(t_i) = \sum_i p_i \mathbf{1}(t_i \leq t)$$



$c) \Rightarrow a)$.

Se $\mathbf{F}_P$ tem a forma estipulada em c), então P é discreta pois:

$$\begin{aligned} P(\{t_i : i \in \mathbb{N}\}) &= \sum_i P(\{t_i\}) \\ &= \sum_i [\mathbf{F}_P(t_i) - \mathbf{F}_P(t_i-)] \end{aligned}$$

Definição - Probabilidade Absolutamente Contínua

Definition (1.40)

Uma probabilidade P em $\mathbb{R}$ é **absolutamente contínua** se existe uma função positiva f_P em $\mathbb{R}$, chamada **função densidade** de P , tal que para todo intervalo $(a, b]$:

$$P((a, b]) = \int_a^b f_P(t) dt$$

Example

A distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$ é um exemplo chave de distribuição absolutamente contínua.

Observação Técnica

No caso geral, as integrais são integrais de Lebesgue. Porém, em quase todos os casos específicos, f_P é contínua por partes e as integrais são integrais de Riemann.

Caracterização via Função de Distribuição

[1.41] A probabilidade P é absolutamente contínua se, e somente se, existe uma função positiva f em $\mathbb{R}$ com $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$ e

$$F_P(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

- ($\Rightarrow$) Se P é absolutamente contínua, então sua densidade f_P satisfaz estas propriedades.
- ($\Leftarrow$) Se $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$, então (1.18) define uma função de distribuição, à qual se aplica o Teorema 1.36.



Portanto, qualquer função positiva f com $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$ pode ser chamada de função densidade.

Exemplo

Considere a função de distribuição:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < s \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq s \end{cases}$$

onde $s > 0$ e $\lambda > 0$.

Exemplo

Considere a função de distribuição:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < s \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq s \end{cases}$$

onde $s > 0$ e $\lambda > 0$.

Características:

- Descontinuidade em $t = s \Rightarrow$ parte **discreta**
- Crescimento contínuo para $t > s \Rightarrow$ parte **contínua**

Parte discreta:

$$P(\{s\}) = F(s) - F(s^-) = (1 - e^{-\lambda s}) - 0 = 1 - e^{-\lambda s}$$

Exemplo

Parte discreta:

$$P(\{s\}) = F(s) - F(s^-) = (1 - e^{-\lambda s}) - 0 = 1 - e^{-\lambda s}$$

Parte contínua:

- Para $t > s$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- Densidade: $f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-s)}$, $t > s$
- Peso total: $e^{-\lambda s}$

Decomposição

A medida de probabilidade P pode ser escrita como:

$$P = (1 - e^{-\lambda s}) \varepsilon_s + e^{-\lambda s} E(\lambda, s)$$

onde:

- ε_s = massa de Dirac em s
- $E(\lambda, s)$ = exponencial deslocada para s , com F.D.:

$$F_{\text{cont}}(t) = \begin{cases} 0, & t < s \\ 1 - e^{-\lambda(t-s)}, & t \geq s \end{cases}$$

Para $t \geq s$:

$$\begin{aligned} F(t) &= (1 - e^{-\lambda s}) \cdot 1 + e^{-\lambda s} \cdot (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \\ &= 1 - e^{-\lambda s} + e^{-\lambda s} - e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Definição - Probabilidade Condicional

Definition (1.43)

Sejam A e B eventos. Desde que $P(A) > 0$, a **probabilidade condicional** de B dado A é

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

No caso em que $P(A) = 0$, adotamos a convenção de que $P(B|A) = P(B)$.

- Interpreta-se $P(B|A)$ como a probabilidade relativa de que B ocorra, sabendo que A ocorreu.
- A Definição 1.43 implica que:

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

independentemente de $P(A) > 0$ ou não.

Lei da Probabilidade Total

[1.44 - Lei da Probabilidade Total] Seja $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ uma partição contável de Ω . Então, para cada evento B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

Demonstração.

Pela aditividade contável de P , como $B = \sum_{i=1}^{\infty} B \cap A_i$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B \cap A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$



Teorema de Bayes

[1.45 - Teorema de Bayes] Suponha que $\{A_1, A_2, \dots\}$ seja uma partição de Ω . Então, para cada evento B com $P(B) > 0$ e cada j :

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Demonstração.

Por duas aplicações da Definição 1.43:

$$\begin{aligned} P(A_j|B) &= \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)} \end{aligned}$$

onde o último passo é pela Proposição 1.44. □

Interpretação do Teorema de Bayes

Interpretação

Pode-se interpretar os A_j como estados não observáveis da natureza, cada um com:

- **Probabilidade a priori** $P(A_j)$ de ocorrer
- **Probabilidade** $P(B|A_j)$ de "causar" um evento observável B

Dado que B realmente ocorreu, o Teorema de Bayes calcula as probabilidades **a posteriori** revisadas $P(A_j|B)$ dos estados A_j .

- **Probabilidades Discretas:** Massa concentrada em um conjunto contável
 - Função de distribuição com saltos
 - $P = \sum_i p_i \epsilon_{t_i}, \sum p_i = 1$
- **Probabilidades Absolutamente Contínuas:** Possuem função densidade
 - $P((a, b]) = \int_a^b f(t) dt$
 - $F_P(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$
- **Probabilidades Mistas:** Combinação de componentes discreta e contínua
- **Probabilidade Condicional:** $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
 - Lei da Probabilidade Total
 - Teorema de Bayes

Esperança Matemática

Se a v.a. real ou numérica X é semi-integrável (superior ou inferiormente) em relação a P , sua **esperança matemática** (ou média), denotada $E(X)$, é a integral

$$\int X dP.$$

Se $X = (X_1, \dots, X_m)$ é uma v.a. m -dimensional, definimos

$$E(X) = (E[X_1], \dots, E[X_m]).$$

X é dita **centrada** se $E(X) = 0$.

Integração e Esperança

Se X é uma V.A. assumindo valores em $(E, \mathcal{E})$, μ sua lei e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, pela Proposição 1.27, $f(X)$ é integrável se e somente se

$$\int_E |f(x)| d\mu(x) < +\infty$$

e neste caso

$$E[f(X)] = \int_E f(x) d\mu(x). \quad (2.1)$$

Em particular, se X é real e semi-integrável, temos

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x). \quad (2.2)$$

Observação sobre a Esperança

A igualdade (2.2) mostra que a esperança matemática depende apenas da lei: diferentes v.a.'s (possivelmente definidas em diferentes espaços de probabilidade) que têm a mesma lei também têm a mesma esperança.

Além disso, (2.1) **caracteriza** a lei de X : se a probabilidade μ em $(E, \mathcal{E})$ é tal que (2.1) vale para toda função f mensurável limitada real (ou para toda função mensurável positiva f), então necessariamente μ é a lei de X .

Este é um método útil para determinar a lei de X .

Cálculo de Esperanças para V.A.'s Positivas

Observação 2.1 (a) Seja X uma v.a. positiva com lei μ e $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua tal que $f(X)$ é integrável. Então

$$E[f(X)] = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(y)P(X \geq y)dy. \quad (2.3)$$

Esta é uma aplicação interessante do Teorema de Fubini: tal f é q.c. diferenciável e

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy.$$

Derivação da Fórmula (2.3)

Temos então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \int_0^{+\infty} f(x) d\mu(x) \\ &= f(0) + \int_0^{+\infty} d\mu(x) \int_0^x f'(y) dy \\ &\stackrel{!}{=} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(y) dy \int_y^{+\infty} d\mu(x) \\ &= f(0) + \int_0^{+\infty} f'(y) P(X \geq y) dy \quad (2.4), \end{aligned}$$

onde ! indica a aplicação do Teorema de Fubini no conjunto $\{(x, y); 0 \leq y \leq x\}$.

Observações sobre a Fórmula

A função $(x, y) \mapsto |f'(y)|1_{[0 \leq y \leq x]}(x)$ deve ser integrável em relação a $\mu \otimes \lambda$. Por exemplo, (2.4) não vale para $f(x) = \sin(e^x)$.

Notar que em (2.3) $P(X \geq y)$ pode ser substituído por $P(X > y)$: as duas funções coincidem exceto em seus pontos de descontinuidade, que são no máximo enumeráveis, logo de medida de Lebesgue 0.

Caso Especial: Fórmula da Esperança Positiva

A relação (2.4), substituindo f pela função identidade $x \mapsto x$ e X por $g(X)$, torna-se, para $g \geq 0$:

$$E[g(X)] = \int_0^{+\infty} P(g(X) \geq t) dt = \int_0^{+\infty} \mu(g \geq t) dt. \quad (2.5)$$

(b) Se X é positiva e inteira e $g(x) = x$, (2.5) toma uma forma interessante: como $P(X \geq t) = P(X \geq k+1)$ para $t \in]k, k+1]$, temos

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

Abuso de Notação e Modelo

Frequentemente faremos um leve abuso: consideraremos algumas v.a.'s sem mencionar em qual espaço de probabilidade estão definidas.

A justificativa é que, para realizar os cálculos, muitas vezes é necessário apenas conhecer a lei das v.a.'s envolvidas e, de qualquer forma, a construção explícita de um espaço de probabilidade sobre o qual as v.a.'s são definidas é sempre possível.

O modelo de um fenômeno aleatório será um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de natureza desconhecida, sobre o qual são definidas algumas v.a.'s $X_1, \dots, X_n$ com leis dadas.

Independência de σ -álgebras

Aqui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade e todas as σ -álgebras consideradas são sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$.

Definição 2.2 As σ -álgebras $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$, são ditas **independentes** se

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (2.6)$$

para toda escolha de $A_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$.

Independência para Famílias

As σ -álgebras de uma família (possivelmente infinita) $(\mathcal{B}_i, i \in I)$ são ditas independentes se as σ -álgebras de toda subfamília finita são independentes.

Observação 2.3 Se as σ -álgebras $(\mathcal{B}_i, i \in I)$ são independentes e se, para cada $i \in I$, $\mathcal{B}'_i \subset \mathcal{B}_i$ é uma sub- σ -álgebra, então as σ -álgebras $(\mathcal{B}'_i, i \in I)$ também são independentes.

Critério para Verificar Independência

Proposição 2.4 Sejam $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$, $i = 1, \dots, n$, famílias de eventos que são estáveis com respeito a interseções finitas, contendo Ω e tais que $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$.

Suponha que (2.6) vale para todo $A_i \in \mathcal{C}_i$. Então as σ -álgebras $\mathcal{B}_i$, $i = 1, \dots, n$, são independentes.

Isso significa que, para provar independência, basta verificar (2.6) para classes menores de eventos.

Prova (Ideia)

Devemos provar que (2.6), que por hipótese vale para $A_i \in \mathcal{C}_i$, na verdade vale para todo $A_i \in \mathcal{B}_i$.

A prova usa indução e o critério de Carathéodory (Proposição 1.11). Fixamos eventos em $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ e consideramos duas medidas finitas em $\mathcal{B}_1$:

$$A \mapsto P\left(A \cap \bigcap_{k=2}^n A_k\right) \quad \text{e} \quad A \mapsto P(A)P\left(\bigcap_{k=2}^n A_k\right).$$

Continuação da Prova

Por hipótese elas coincidem em $\mathcal{C}_1$. Pelo critério de Carathéodory, coincidem também em $\mathcal{B}_1$. Logo, (2.6) vale para $A_1 \in \mathcal{B}_1$ e $A_i \in \mathcal{C}_i$ para $i > 1$.

Procede-se por indução. Considere, para cada $k = 1, \dots, n$ a propriedade:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i),$$

para $A_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, k$, e $A_i \in \mathcal{C}_i$. (2.7)

Continuação da Prova

É claro que esta propriedade vale para $k = 1$. Suponha que esta última igualdade seja válida para $k = r - 1$.

Considere $A_i \in \mathcal{B}_i$ $i = 1, \dots, r - 1$ e, em $\mathcal{B}_r$ defina duas medidas

$$B \in \mathcal{B}_r, B \mapsto P(A_1 \cap \dots \cap A_{r-1} \cap B \cap A_{r+1} \cap \dots \cap A_n)$$

$$B \in \mathcal{B}_r, B \mapsto P(B)P(A_1 \cap \dots \cap A_{r-1} \cap \hat{A}_r \cap A_{r+1} \cap \dots \cap A_n)$$

Aplique o mesmo argumento que antes.

Proposição 2.5 Sejam $(\mathcal{B}_i, i \in \mathcal{T})$ σ -álgebras independentes e $(I_j, j \in J)$ uma partição de $\mathcal{T}$. Então as σ -álgebras $(\sigma(\mathcal{B}_i, i \in I_j), j \in J)$ são independentes.

Isto responde, por exemplo, a pergunta: se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ são independentes, então $\sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e $\mathcal{B}_3$ também são?

Prova da Proposição 2.5

Basta considerar J finito. Para cada $j \in J$, seja $\mathcal{C}_j$ a família de todas as interseções finitas de eventos das σ -álgebras $\mathcal{B}_i$ para $i \in I_j$.

As famílias $\mathcal{C}_j$ são estáveis para interseções finitas, geram respectivamente $\sigma(\mathcal{B}_i, i \in I_j)$ e contêm Ω .

Como os $\mathcal{B}_i$ são independentes, para toda escolha de $C_j \in \mathcal{C}_j$, temos:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n C_j\right) = \prod_{j=1}^n P(C_j).$$

Pela Proposição 2.4, as σ -álgebras $\sigma(\mathcal{C}_j) = \sigma(\mathcal{B}_i, i \in I_j)$ são independentes.

Independência de V.A.'s e Eventos

Definição 2.6 As v.a.'s $(X_i)_{i \in \mathcal{T}}$ com valores nos espaços mensuráveis $(E_i, \mathcal{C}_i)$ respectivamente são ditas **independentes** se as σ -álgebras geradas $(\sigma(X_i))_{i \in \mathcal{T}}$ são independentes.

Os eventos $(A_i)_{i \in \mathcal{T}}$ são ditos **independentes** se as σ -álgebras $(\sigma(A_i))_{i \in \mathcal{T}}$ são independentes.