

Independência

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Intuição sobre Independência

Recordemos a intuição por trás das noções de independência.

Eventos independentes devem ser tais que o conhecimento de que alguns deles ocorreram não dá informação sobre se os outros ocorrerão ou não.

De modo similar, σ -álgebras independentes são tais que o conhecimento de se os eventos de algumas delas ocorreram ou não não fornece informação útil sobre se os eventos das outras ocorreram ou não. Neste sentido, uma σ -álgebra pode ser vista como uma "quantidade de informação".

Aplicação e Definição Formal

Esta intuição é importante quando devemos construir um modelo (i.e., um espaço de probabilidade) destinado a descrever um fenômeno dado. Uma situação típica surge, por exemplo, ao considerar eventos relacionados a lançamentos subsequentes de moedas ou dados, ou à escolha de indivíduos em uma amostra.

No entanto, não esqueçamos que, ao lidar com provas ou manipulações matemáticas, apenas as propriedades formais introduzidas pelas definições devem ser levadas em conta.

Observações sobre Independência

Note que v.a.'s independentes podem tomar valores em espaços mensuráveis diferentes, mas, é claro, devem ser definidas no mesmo espaço de probabilidade.

Note também que se os eventos A e B são independentes, então A e B^c também são independentes, pois a σ -álgebra gerada por um evento coincide com a gerada por seu complemento:

$$\sigma(A) = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\} = \sigma(A^c).$$

Generalização

Mais geralmente, se $A_1, \dots, A_n$ são eventos independentes, então $B_1, \dots, B_n$ também são independentes, onde $B_i = A_i$ ou $B_i = A_i^c$.

Isso está de acordo com a intuição, pois A e A^c carregam a mesma informação.

Independência de V.A.'s - Formulação

A σ -álgebra gerada por uma v.a. X tomando valores num espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ é formada pelos eventos $X^{-1}(A) = \{X \in A\}$, $A \in \mathcal{E}$.

Portanto, dizer que $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ são independentes significa que

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in A_{i_m}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_m} \in A_{i_m}) \quad (2.8)$$

para todo subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathcal{I}$ e para toda escolha de $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_m} \in \mathcal{E}_{i_m}$.

Lema sobre Mensurabilidade e Independência

Lema 2.7 Se as σ -álgebras $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ são independentes e se, para todo $i \in \mathcal{I}$, X_i é $\mathcal{B}_i$ -mensurável, então as v.a.'s $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ são independentes.

De fato, $\sigma(X_i) \subset \mathcal{B}_i$, logo as σ -álgebras $(\sigma(X_i))_{i \in \mathcal{I}}$ também são independentes.

Funções de V.A.'s Independentes

Se as v.a.'s $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ são independentes assumindo valores nos espaços mensuráveis $(E_i, \mathcal{E}_i)$ e $f_i : E_i \rightarrow G_i$ são funções mensuráveis assumindo valores em $(G_i, \mathcal{G}_i)$.

Então, as v.a.'s $(f_i(X_i))_{i \in \mathcal{I}}$ também são independentes, pois

$$\sigma(f_i(X_i)) \subset \sigma(X_i).$$

Intuição sobre Funções de V.A.'s Independentes

Em outras palavras, **funções de v.a.'s independentes são independentes.**

Se o conhecimento dos valores tomados por alguns dos X_i não dá informação sobre os valores tomados por outros X_j 's, não há razão para que os valores tomados por alguns dos $f_i(X_i)$ devam dar informação sobre os valores tomados por outros $f_j(X_j)$'s.

Teorema Fundamental: Independência e Lei Conjunta

Teorema 2.8 Sejam X_i , $i = 1, \dots, n$, v.a.'s com valores nos espaços mensuráveis $(E_i, \mathcal{E}_i)$ respectivamente. Denotemos por μ a lei de $(X_1, \dots, X_n)$, que é uma v.a. com valores no espaço produto dos $(E_i, \mathcal{E}_i)$, e por μ_i a lei de X_i , $i = 1, \dots, n$.

Então $X_1, \dots, X_n$ são independentes se e somente se

$$\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Prova do Teorema 2.8

Suponha $X_1, \dots, X_n$ independentes: para toda escolha de $A_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \times \dots \times A_n) &= P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) \quad (2.9) \\ &= P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n).\end{aligned}$$

Logo, μ coincide com a medida produto em retângulos. Portanto $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$.

Prova (continuação)

A recíproca segue imediatamente escrevendo (2.9) ao contrário: se $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$,

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) &= \mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n) \\ &= P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n). \end{aligned}$$

logo $X_1, \dots, X_n$ são independentes.

Consequência do Teorema 2.8

Desprende-se do Teorema 2.8, que a independência de v.a.'s depende apenas de sua lei conjunta.

Se $X_1, \dots, X_n$ são independentes e $(X_1, \dots, X_n)$ tem a mesma lei que $(Y_1, \dots, Y_n)$ (possivelmente definidas em um espaço de probabilidade diferente), então $Y_1, \dots, Y_n$ também são independentes.

Independência e Funções Contínuas

Proposição 2.9 Sejam $X_1, \dots, X_m$ v.a.'s tomando valores nos espaços métricos $E_1, \dots, E_m$. Então $X_1, \dots, X_m$ são independentes se e somente se para toda escolha de funções contínuas limitadas $f_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$,

$$E[f_1(X_1) \cdots f_m(X_m)] = E[f_1(X_1)] \cdots E[f_m(X_m)]. \quad (2.10)$$

Idéia da prova: Do lado esquerdo integramos com relação à lei do vetor aleatório, enquanto do lado direito integramos com relação ao produto das leis. Como temos igualdade para todas as f_i contínuas e limitadas o resultado segue.

Caso Especial da Proposição 2.9

Se além disso os espaços E_i são também separáveis e localmente compactos, então é suficiente verificar (2.10) para funções contínuas com suporte compacto f_i .

Esperança do Produto de V.A.'s Independentes

Corolário 2.10 Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s reais integráveis e independentes. Então seu produto $X_1 \cdots X_n$ é integrável e

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n).$$

Prova: Este resultado está obviamente relacionado à Proposição 2.9, mas a função $x \mapsto x$ não é limitada. O Teorema de Fubini lida facilmente com esta dificuldade.

Prova do Corolário 2.10

Como a lei conjunta de $(X_1, \dots, X_n)$ é o produto $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$, o Teorema de Fubini dá

$$\begin{aligned} E(|X_1 \cdots X_n|) &= \int |x_1| d\mu_1(x_1) \cdots \int |x_n| d\mu_n(x_n) \\ &= E(|X_1|) \cdots E(|X_n|) < +\infty. \end{aligned}$$

Logo o produto é integrável e, repetindo o argumento sem valores absolutos, Fubini dá $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$.

Observação 2.11 Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s tomando seus valores nos espaços mensuráveis e enumeráveis $E_1, \dots, E_n$, munidos da σ -álgebra das partes. Então elas são independentes se e somente se para toda $x_i \in E_i$ temos

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n). \quad (2.12)$$

Independência Parcial vs. Independência

Observação 2.12 Dada uma família $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de v.a.'s, é possível que X_i seja independente de X_j para todo $i, j \in \mathcal{I}, i \neq j$, sem que a família seja formada por v.a.'s independentes. Em outras palavras, independência aos pares é uma propriedade (muito) mais fraca que independência.

Exemplo de Independência Aos Pares

Sejam X e Y v.a.'s independentes tais que $P(X = \pm 1) = P(Y = \pm 1) = \frac{1}{2}$ e seja $Z = XY$. Temos que $P(Z = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

X e Z são independentes:

$$P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} = P(X = 1)P(Z = 1).$$

Da mesma forma vemos que $P(X = i, Z = j) = P(X = i)P(Z = j)$ para todo $i, j = \pm 1$.

Continuação do Exemplo

Por simetria, Y e Z também são independentes.

As três v.a.'s X, Y, Z no entanto não são independentes: como $X = Z/Y$, X é $\sigma(Y, Z)$ -mensurável e $\sigma(X) \subset \sigma(Y, Z)$. Se fossem independentes, $\sigma(X)$ seria independente de $\sigma(Y, Z)$ e os eventos de $\sigma(X)$ seriam independentes de si mesmos.

Conclusão do Exemplo

Mas se A é independente de si mesmo, então $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$, de modo que só pode ter probabilidade igual a 0 ou a 1, enquanto aqui os eventos $\{X = 1\}$ e $\{X = -1\}$ pertencem a $\sigma(X)$ e têm probabilidade $\frac{1}{2}$.

Construção de Espaço de probabilidade para uma V.A.

Observação 2.13 (a)

Dada uma probabilidade μ num espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$, é sempre possível construir um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no qual uma v.a. X é definida com valores em $(E, \mathcal{E})$ e tendo lei μ . Basta, por exemplo, definir $\Omega = E$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, $P = \mu$ e $X(x) = x$.

Construção de Sequência Independente

(b) Muito frequentemente consideraremos sequências $(X_n)_n$ de v.a.'s independentes, definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tendo leis dadas, $X_i \sim \mu_i$.

Note que tal objeto sempre existe. Se X_i assume valores em $(E_i, \mathcal{E}_i)$ - e $X_i \sim \mu_i$, defina:

$$\Omega = E_1 \times E_2 \times \dots$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \dots$$

$$P = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots$$

Continuação da Construção

Como os elementos do produto Ω são da forma $\omega = (x_1, x_2, \dots)$ com $x_i \in E_i$, podemos definir $X_i(\omega) = x_i$. Tal mapa é mensurável $E \rightarrow E_i$ (é um projetor) e a sequência $(X_n)_n$ definida dessa forma satisfaz as condições requisitadas. A independência é garantida pelo fato de sua lei conjunta ser a lei produto.

Densidade Conjunta de V.A.'s Independentes

Observação 2.14 Sejam X_i , $i = 1, \dots, m$, v.a.'s reais independentes com valores nos espaços $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Seja, para cada i , ρ_i uma medida σ -finita em $(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que a lei μ_i de X_i tem densidade f_i em relação a ρ_i . Então a medida produto $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m$, que é a lei de $(X_1, \dots, X_m)$, tem densidade

$$f(x) = f_1(x_1) \dots f_m(x_m)$$

em relação à medida produto $\rho = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_m$.

Lei 0-1 de Kolmogorov

Teorema 2.15 (Lei 0-1 de Kolmogorov) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s independentes. Seja $\mathcal{B}^n = \sigma(X_k, k \geq n)$ e $\mathcal{B}^\infty = \bigcap_n \mathcal{B}^n$ (a σ -álgebra caudal). Então $\mathcal{B}^\infty$ é P-trivial, i.e., para todo $A \in \mathcal{B}^\infty$, temos $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Consequência da Lei 0-1

Além disso, se X é uma v.a. m -dimensional $\mathcal{B}^\infty$ -mensurável, então X é constante q.c.

Prova: Seja $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_k, k \geq 0)$. É evidente que $\mathcal{F}_n$ é independente de $\mathcal{B}^{n+1}$, que é gerado pelos X_i com $i > n$. Logo, também é independente de $\mathcal{B}^\infty \subset \mathcal{B}^{n+1}$.

Prova (continuação)

Provemos que $\mathcal{B}^\infty$ é independente de $\mathcal{F}_\infty$. A família $\mathcal{C} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ é estável com respeito a interseções finitas e gera $\mathcal{F}_\infty$. Se $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$, então $A \in \mathcal{F}_n$ para algum n , logo é independente de $\mathcal{B}^\infty$. Portanto A é independente de $\mathcal{B}^\infty$. Assim, $\mathcal{B}^\infty$ e $\mathcal{F}_\infty$ são independentes.

Prova (conclusão)

Mas $\mathcal{B}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$, de modo que $\mathcal{B}^\infty$ é independente de si mesma. Se $A \in \mathcal{B}^\infty$, como na Observação 2.12, temos $P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A)$, i.e., $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

V.A's caudais são constantes

Se X é uma v.a. real $\mathcal{B}^\infty$ -mensurável, então para todo $a \in \mathbb{R}$ o evento $\{X \leq a\}$ pertence a $\mathcal{B}^\infty$ e sua probabilidade só pode ser igual a 0 ou a 1. Seja $c = \sup\{a; P(X \leq a) = 0\}$, então $c < +\infty$. Pode-se mostrar que X toma q.c. apenas o valor c .

Aplicação: Médias Empíricas

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais independentes e $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ (as médias empíricas). Então $\bar{X} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n$ é uma v.a. caudal.

Podemos escrever, para todo inteiro k ,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_k) + \frac{1}{n}(X_{k+1} + \cdots + X_n)$$

e como o primeiro termo tende a 0, $\bar{X}$ não depende de $X_1, \dots, X_k$ para todo k .

Consequência para Convergência

Deduzimos que $\overline{X}$ é mensurável com respeito à σ -álgebra caudal e é q.c. constante. O mesmo argumento vale para $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n$. Portanto,

$$\{\text{a sequência } (\overline{X}_n)_n \text{ é convergente}\}$$

é um evento caudal e tem probabilidade 0 ou 1.

Conclusão sobre Convergência

Portanto, ou a sequência $(\bar{X}_n)_n$ converge q.c. com probabilidade 1 (e neste caso o limite é q.c. constante) ou ela não converge com probabilidade 1.

Um argumento similar pode ser desenvolvido ao investigar a convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ de v.a.'s independentes. Também neste caso o evento [a série converge] pertence à σ -álgebra caudal.

Conclusão Final

Portanto, ou a série não converge com probabilidade 1 ou é q.c. convergente.