

Funções Características (continuação) e Transformada de Laplace

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Prova do Lema 2.29 (continuação)

Temos, para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi_\sigma(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} f_\sigma(x-y)(\psi(x) - \psi(y))dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} f_\sigma(x-y)|\psi(x) - \psi(y)|dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Limitação de l_1 e l_2

Escolha $\delta > 0$ tal que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \epsilon$ sempre que $|x - y| \leq \delta$ (ψ é uniformemente contínua). Então $l_1 \leq \epsilon$.

Além disso,

$$l_2 \leq 2\|\psi\|_\infty \int_{\{|y-x|>\delta\}} f_\sigma(x-y)dy.$$

Aplicação da Desigualdade de Markov

Se $X = (X_1, \dots, X_m)$ tem densidade f_σ , então

$$\int_{\{|y-x|>\delta\}} f_\sigma(x-y) dy = \mathbf{P}(|X| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \mathbf{E}(|X|^2) \leq \frac{m\sigma^2}{\delta^2}.$$

Escolha σ pequeno o suficiente para que $2\|\psi\|_\infty \frac{m\sigma^2}{\delta^2} \leq \epsilon$. Então

$$|\psi(x) - \psi_\sigma(x)| \leq 2\epsilon \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^m.$$

Além disso, $\psi_\sigma \in C_0(\mathbb{R}^m)$.

Teorema 2.30 (Teorema da Unicidade)

Sejam μ, ν probabilidades em $\mathbb{R}^m$ tais que

$$\widehat{\mu}(\theta) = \widehat{\nu}(\theta) \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}^m.$$

Então $\mu = \nu$.

A igualdade das funções características significa que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle \theta, x \rangle} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle \theta, x \rangle} d\nu(x) \quad \text{para todo } \theta.$$

Prova do Teorema 2.30

Basta provar que $\int \psi d\mu = \int \psi d\nu$ para toda $\psi \in C_K(\mathbb{R}^m)$. Seja $\psi \in C_K(\mathbb{R}^m)$ e ψ_σ como em (2.51). Então

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi_\sigma(x) d\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) dy \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2|\theta|^2} e^{-i\langle\theta,y\rangle} \widehat{\mu}(\theta) d\theta.$$

Continuação da Prova

Como a integral depende apenas de $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi_\sigma(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\sigma(x) d\nu(x).$$

Pelo Lema 2.29, $\psi_\sigma \rightarrow \psi$ uniformemente. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) d\mu(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\sigma(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) d\nu(x).$$

Portanto, $\mu = \nu$.

Exemplo 2.31: Convolução de Gaussianas

Sejam $\mu \sim N(a, \sigma^2)$ e $\nu \sim N(b, \tau^2)$. Então

$$\phi_{\mu * \nu}(\theta) = \hat{\mu}(\theta) \hat{\nu}(\theta) = e^{i(a+b)\theta} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + \tau^2)\theta^2}.$$

Esta é a função característica de $N(a + b, \sigma^2 + \tau^2)$. Logo,

$$\mu * \nu = N(a + b, \sigma^2 + \tau^2).$$

Exemplo 2.32: Função Característica Real implica Simetria

Seja X uma v.a. cuja função característica é real. Então X é simétrica.

De fato, $\phi_{-X}(\theta) = \phi_X(-\theta) = \overline{\phi_X(\theta)} = \phi_X(\theta)$. Logo, X e $-X$ têm a mesma função característica e, portanto, a mesma lei.

Teorema 2.33 (Inversão)

Seja μ uma probabilidade em $\mathbb{R}^m$. Se $\hat{\mu}$ é integrável, então μ é absolutamente contínua e tem densidade

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \theta, x \rangle} \hat{\mu}(\theta) d\theta. \quad (2.54)$$

Exemplo 2.34: Uma Função Característica Periódica

Seja ϕ a função tal que $\phi(\theta) = 1 - |\theta|$ para $-1 \leq \theta \leq 1$, estendida periodicamente a $\mathbb{R}$.

Vamos provar que ϕ é uma função característica e determinar a lei correspondente.

Expansão em Série de Fourier

Como ϕ é periódica e par, sua série de Fourier é

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\pi\theta},$$

com $b_k = \frac{1}{2}a_{|k|}$ para $k \neq 0$, $b_0 = \frac{1}{2}a_0$.

Cálculo dos Coeficientes

$$a_0 = \int_{-1}^1 (1 - |\theta|) d\theta = 1.$$

Para $k > 0$,

$$a_k = \int_{-1}^1 (1 - |\theta|) \cos(k\pi\theta) d\theta = \frac{2}{(k\pi)^2} (1 - \cos(k\pi)).$$

Logo,

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ é par,} \\ \frac{4}{(k\pi)^2} & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, ϕ é a função característica de uma v.a. X com valores em $\pi\mathbb{Z}$ tal que:

$$P(X = \pm(2m+1)\pi) = \frac{1}{2} a_{|2m+1|} = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

X não tem esperança finita (pois ϕ não é diferenciável).

Função Característica das Marginais

Seja $X = (X_1, \dots, X_m)$ uma v.a. em $\mathbb{R}^n$ ($n = n_1 + \dots + n_m$) com função característica ϕ . A função característica da k -ésima marginal X_k é

$$\phi_{X_k}(\theta) = \phi(\tilde{\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}^{n_k},$$

onde $\tilde{\theta}$ tem θ nas posições correspondentes a X_k e 0 nas outras.

Independência e Função Característica Conjunta

Se $X_1, \dots, X_m$ são independentes, então para $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$,

$$\phi_X(\theta) = \phi_{X_1}(\theta_1) \cdots \phi_{X_m}(\theta_m). \quad (2.56)$$

Em termos de leis: se $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m$, então

$$\hat{\mu}(\theta) = \hat{\mu}_1(\theta_1) \cdots \hat{\mu}_m(\theta_m). \quad (2.57)$$

Proposição 2.35: Caracterização da Independência

As v.a.'s $X_1, \dots, X_m$ são independentes se e somente se, para todo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$,

$$\phi_X(\theta) = \phi_{X_1}(\theta_1) \cdots \phi_{X_m}(\theta_m). \quad (2.58)$$

Prova: Se são independentes, (2.58) vale. Reciprocamente, se (2.58) vale, então X tem a mesma função característica que o produto das leis das X_i . Pelo Teorema 2.30, a lei de X é o produto, logo são independentes.

Definição

Seja X uma v.a. m -dimensional, μ sua lei e $z \in \mathbb{C}^m$. A **transformada de Laplace complexa (TLC)** de X (ou de μ) é

$$L(z) = E(e^{\langle z, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{\langle z, x \rangle} d\mu(x) \quad (2.59)$$

definida para os z tais que $e^{\langle z, X \rangle}$ é integrável.

Relação com a Função Característica

No eixo imaginário, $|e^{\langle z, X \rangle}| = 1$, logo L sempre está definida aí.
Temos

$$L(i\theta) = \phi(\theta) \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}^m.$$

Portanto, a TLC L contém a função característica ϕ (restrição ao eixo imaginário).