

Transformada de Laplace e Leis Gaussianas Multivariadas

Cristian Coletti

Primeiro quadrimestre de 2026

Domínio da Transformada de Laplace Complexa

Lembrando que $\mathbf{e}^{\langle z, x \rangle} = \mathbf{e}^{\Re \langle z, x \rangle} (\cos \langle z, x \rangle + i \sin \langle z, x \rangle)$, o domínio $\mathcal{D}_\mu$ de L é o conjunto dos $z \in \mathbb{C}^m$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{e}^{\Re \langle z, x \rangle} d\mu(x) < +\infty.$$

Agora, nos restringimos ao caso $m = 1$.

Abcissas de Convergência

Considere

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \mathbf{e}^{\Re z x} d\mu(x), \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{\Re z x} d\mu(x).$$

Defina

$$x_2 \sup \left\{ t; \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{tx} d\mu(x) < +\infty \right\}, \quad (x_2 \geq 0).$$

Então $I_2 < +\infty$ se $\Re z < x_2$, e $I_2 = +\infty$ se $\Re z > x_2$.

Abscissa à Esquerda

Similarmente, existe $x_1 \leq 0$ tal que $I_1(z) < +\infty$ se $x_1 < \Re z$ e $I_1(z) = +\infty$ se $\Re z < x_1$.

O domínio $\mathcal{D}_\mu$ contém a faixa aberta $S = \{z; x_1 < \Re z < x_2\}$.

Teorema 2.36

Seja μ uma probabilidade em $\mathbb{R}$. Existem $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ (abscissas de convergência) com $x_1 \leq 0 \leq x_2$ tais que:

- A transformada de Laplace L de μ está definida na faixa $S = \{z; x_1 < \Re z < x_2\}$.
- Não está definida para $\Re z > x_2$ ou $\Re z < x_1$.
- L é holomorfa em S .

Prova da Holomorfia

Precisamos verificar que em S as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Como

$$L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} d\mu(t),$$

devemos verificar que podemos derivar sob o sinal de integral.

Verificação das Condições de Derivação

Temos

$$L_1(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \cos(yt) d\mu(t), \quad L_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \sin(yt) d\mu(t).$$

A derivada do integrando em relação a x é $t \mapsto te^{xt} \cos(yt)$. Para $x \in S$, existem constantes c_1, c_2 tais que

$$|t|e^{xt} \leq c_1 e^{(x_1+\epsilon)t} \quad (t \leq 0), \quad |t|e^{xt} \leq c_2 e^{(x_2-\epsilon)t} \quad (t \geq 0).$$

Função Dominante Integrável

A função $g(t) = c_2 e^{(x_2 - \epsilon)t} + c_1 e^{(x_1 + \epsilon)t}$ é integrável em relação a μ , pois $x_2 - \epsilon$ e $x_1 + \epsilon$ pertencem a S . Logo, as condições da Proposição 1.21 são satisfeitas.

Satisfação das Equações de Cauchy-Riemann

Podemos derivar sob a integral:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{xt} \cos(yt) d\mu(t) = \frac{\partial L_2}{\partial y}(x, y).$$

Argumento similar para a segunda equação. Portanto, L é holomorfa em S .

Uma função holomorfa é determinada por seus valores em um conjunto com pelo menos um ponto de acumulação. Portanto, conhecer a transformada de Laplace no eixo real (ou em um intervalo aberto) determina seu valor em toda a faixa de convergência.

Exemplo 2.37 (a): Cauchy

Se X tem densidade de Cauchy $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, então

$$L(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{1+x^2} dx = +\infty \quad \text{para todo } t \neq 0.$$

O domínio é apenas o eixo imaginário $\Re z = 0$; a faixa de convergência é vazia.

Exemplo 2.37 (b): $N(0, 1)$

Se $X \sim N(0, 1)$, então para $t \in \mathbb{R}$,

$$L(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = e^{t^2/2}.$$

A faixa de convergência é todo $\mathbb{C}$. Por continuação analítica, $L(z) = e^{z^2/2}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Em particular, $L(it) = e^{-t^2/2}$.

Exemplo 2.37 (c): $\text{Gama}(\alpha, \lambda)$

Se $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, para $t \in \mathbb{R}$,

$$L(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{tx} e^{-\lambda x} dx.$$

Esta integral converge se e somente se $t < \lambda$. Portanto, a faixa é $S = \{\Re z < \lambda\}$. Para $t < \lambda$,

$$L(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha.$$

Continuação Analítica para a Gama

Por continuação analítica, para $\Re z < \lambda$,

$$L(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z} \right)^\alpha. \quad (2.61)$$

Logo, a função característica é

$$\phi(t) = L(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^\alpha.$$

Exemplo 2.37 (d): Poisson

Se X é Poisson com parâmetro λ , então para $z \in \mathbb{R}$,

$$L(z) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{zk} = e^{\lambda(e^z - 1)}. \quad (2.62)$$

As abscissas de convergência são infinitas.

Transformada de Laplace da Soma

Se X e Y são independentes, então

$$L_{X+Y}(z) = L_X(z)L_Y(z).$$

O domínio de L_{X+Y} é a interseção dos domínios de L_X e L_Y .

Momentos via Transformada de Laplace

Se as abscissas de convergência são diferentes de 0, a TLC é analítica em 0. Logo, a função característica é infinitamente diferenciável e todos os momentos são finitos. Temos

$$L_X^{(k)}(0) = E(X^k). \quad (2.63)$$

Em particular, $L'(0) = E(X)$.

Vetor Gaussiano Padrão

Sejam $X_1, \dots, X_m$ i.i.d. $N(0, 1)$. O vetor $X = (X_1, \dots, X_m)$ tem densidade

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

e função característica

$$\phi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2}. \quad (2.64)$$

Esta é a lei $N(0, I)$, onde I é a matriz identidade.

Transformação Afim de um Gaussiano

Se $Y = AX + b$, com A $m \times m$ e $b \in \mathbb{R}^m$, então por (2.40)

$$\phi_Y(\theta) = \mathbf{e}^{i\langle \theta, b \rangle} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\langle AA^* \theta, \theta \rangle}. \quad (2.65)$$

Teorema 2.38: Existência da Gaussiana Multivariada

Dado um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $m \times m$ positiva definida C , existe uma probabilidade μ em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$\hat{\mu}(\theta) = \mathbf{e}^{i\langle \theta, b \rangle} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle}.$$

Dizemos que μ é uma lei $N(b, C)$ (normal ou Gaussiana com média b e matriz de covariância C).

Prova: Existência da Raiz Quadrada

Basta mostrar que existe uma matriz A tal que $AA^* = C$. Se C é positiva definida, tal matriz sempre existe (resultado clássico de álgebra linear). A pode ser escolhida simétrica (raiz quadrada de C).

Representação de uma Gaussiana

Uma v.a. $Y \sim N(b, C)$ pode sempre ser escrita como $Y = AX + b$, onde $X \sim N(0, I)$ e A é uma raiz quadrada de C (i.e., $AA^* = C$).

Média e Covariância

Se $Y \sim N(b, C)$, então $E(Y) = b$ e sua matriz de covariância é C .
De fato, se $Y = AX + b$ com $X \sim N(0, I)$, então $E(Y) = b$ e a covariância é $AIA^* = AA^* = C$.

Densidade quando C é Invertível

Se C é invertível, então A também é invertível. Neste caso, $Y = AX + b$ tem densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det C)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(y-b), y-b \rangle}.$$

Caso C não Invertível

Se C não é invertível, a lei $N(b, C)$ não pode ter densidade em relação à medida de Lebesgue. A imagem da aplicação linear A é um hiperplano próprio de $\mathbb{R}^m$, então Y toma valores nesse hiperplano com probabilidade 1.

Transformação Linear de uma Gaussiana

Se $X \sim N(b, C)$ é m -dimensional, R é uma matriz $d \times m$ e $\tilde{b} \in \mathbb{R}^d$, então $Y = RX + \tilde{b}$ tem função característica

$$\phi_Y(\theta) = e^{i\langle \theta, \tilde{b} + Rb \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle RCR^* \theta, \theta \rangle}. \quad (2.66)$$

Logo, $Y \sim N(\tilde{b} + Rb, RCR^*)$.