

Cálculo de Leis

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Muitos problemas em probabilidade se resumem ao cálculo da lei de uma v.a., que é o tópico desta seção.

Lembre que se X é uma v.a. com valores num espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$, sua lei é uma probabilidade μ em $(E, \mathcal{E})$ tal que (Proposição 1.27)

$$E[\phi(X)] = \int_E \phi(x) d\mu(x) \quad (2.13)$$

para toda função mensurável limitada $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Determinação da Lei de $\Phi(X)$

Seja X uma v.a. com lei μ e $\Phi : E \rightarrow G$ uma aplicação mensurável.
Como determinar a lei ν de $\Phi(X)$?

Pela regra de integração com respeito a uma imagem de probabilidade,

$$\mathbb{E} [\phi(\Phi(X))] = \int_E \phi(\Phi(x)) d\mu(x),$$

mas também

$$\mathbb{E} [\phi(\Phi(X))] = \int_G \phi(y) d\nu(y),$$

o que nos leva à relação

$$\int_E \phi(\Phi(x)) d\mu(x) = \int_G \phi(y) d\nu(y) \quad (2.14)$$

Método da "Função Boba"

Uma probabilidade ν satisfazendo (2.14) é necessariamente a lei de $\Phi(X)$. Portanto, uma maneira possível de calcular a lei de $\Phi(X)$ é resolver a "equação" (2.14) para toda função mensurável limitada ϕ , com ν como incógnita.

Este é o método da "função boba". Um olhar mais atento a (2.14) nos permite prever que a questão se reduz naturalmente a uma mudança de variável.

Exemplo 2.16: Densidades Marginais

Sejam X, Y v.a.'s $\mathbb{R}^d$ - e $\mathbb{R}^m$ -valorizadas respectivamente, tendo densidade conjunta $f : \mathbb{R}^{d+m} \rightarrow \mathbb{R}$. X e Y também têm lei com densidade?

Para toda ϕ limitada mensurável,

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m} \phi(x) f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy,$$

concluimos que a lei de X é $d\mu(x) = f_X(x)dx$, onde

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy.$$

Exemplo 2.17: Densidade da Soma

Sejam X, Y v.a.'s d -dimensionais com densidade conjunta f . Sua soma $X + Y$ tem densidade?

Temos

$$E[\phi(X + Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x + y) f(x, y) dx.$$

Com a mudança $z = x + y$ na integral interna e trocando a ordem:

$$E[\phi(X + Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) dz \int_{\mathbb{R}^d} f(z - y, y) dy.$$

Logo, $X + Y$ tem densidade

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z - y, y) dy.$$

Dadas duas probabilidades μ, ν em $\mathbb{R}^d$, sua **convolução** é a imagem da medida produto $\mu \otimes \nu$ sob a aplicação "soma" $(x, y) \mapsto x + y$.

Denota-se $\mu * \nu$.

Equivalentemente, se X, Y são independentes com leis μ e ν , então $\mu * \nu$ é a lei de $X + Y$.

Proposição 2.18

Se μ, ν têm densidades f, g em relação à medida de Lebesgue, então $\mu * \nu$ tem densidade

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(z - y)f(y)dy.$$

Prova: Consequência imediata do Exemplo 2.17 com $f(x, y)$ substituído por $f(x)g(y)$.

Exemplo 2.19: Transformação Polar

Sejam W, T independentes, W exponencial de parâmetro $\frac{1}{2}$, T uniforme em $[0, 2\pi]$. Seja $R = \sqrt{W}$. Qual a lei conjunta de (X, Y) onde $X = R \cos T$, $Y = R \sin T$? X e Y são independentes?

Para $r > 0$,

$$F_R(r) = P(\sqrt{W} \leq r) = P(W \leq r^2) = 1 - e^{-r^2/2}, \quad r \geq 0.$$

Derivando, a densidade de R é

$$f_R(r) = re^{-r^2/2}, \quad r > 0,$$

e $f_R(r) = 0$ para $r \leq 0$.

Densidade Conjunta de (R, T)

A lei de T tem densidade $\frac{1}{2\pi}$ em $[0, 2\pi]$. Logo, (R, T) tem densidade conjunta

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}, \quad r > 0, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então,

$$E[\phi(X, Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{+\infty} \phi(r \cos t, r \sin t) r e^{-r^2/2} dr.$$

Mudança para Coordenadas Cartesianas

Em coordenadas cartesianas,

$$E[\phi(X, Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy.$$

Comparando com (2.15), a densidade conjunta g de (X, Y) é

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Conclusão do Exemplo 2.19

Como

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

g é a densidade do produto de duas leis $N(0, 1)$. Logo, X e Y são $N(0, 1)$ e, como sua lei conjunta é o produto das marginais, são independentes.

Exemplo 2.20: Transformação Afim

Seja X uma v.a. m -dimensional com densidade f . Seja A uma matriz $m \times m$ invertível e $b \in \mathbb{R}^m$. A v.a. $Y = AX + b$ tem densidade?

Para toda ϕ limitada mensurável,

$$E[\phi(Y)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(Ax + b)f(x)dx.$$

Mudança de Variável

Com $y = Ax + b$, $x = A^{-1}(y - b)$, temos

$$E[\phi(Y)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(A^{-1}(y - b)) |\det A^{-1}| dy.$$

Logo, Y tem densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(y - b)).$$

Caso Especial: Simetria

Se $b = 0$ e $A = -I$ (matriz identidade), então

$$f_{-Y}(y) = f_Y(-y).$$

Uma v.a. Y tal que $Y \sim -Y$ é dita **simétrica**. Tal v.a., se integrável, é centrada, pois $E(Y) = -E(Y)$.

Exemplo 2.21: Produto e Razão

Sejam X, Y i.i.d. com densidade

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1,$$

$f(x) = 0$ caso contrário. Qual a lei conjunta de $U = XY$ e $V = \frac{X}{Y}$?

Aplicação do Método

Suponha que a lei conjunta tem densidade g . Então,

$$E[\phi(U, V)] = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u, v) g(u, v) du dv.$$

Mas

$$E[\phi(U, V)] = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \phi(xy, \frac{x}{y}) \frac{1}{x^2 y^2} dx dy.$$

Mudança de Variável

Fazemos $(u, v) = \Psi(x, y) = (xy, \frac{x}{y})$, cuja inversa é

$$\psi^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \right).$$

Seu diferencial tem determinante

$$|\det D\psi^{-1}(u, v)| = \frac{1}{2v}.$$

A condição $x > 1, y > 1$ torna-se $u > 1, \frac{1}{u} \leq v \leq u$.

Resultado Final

Então,

$$E[\phi(U, V)] = \int_1^{+\infty} du \int_{1/u}^u \phi(u, v) \frac{1}{2u^2 v} dv.$$

Logo, a densidade de (U, V) é

$$g(u, v) = \frac{1}{2u^2 v} \mathbb{I}_{\{u > 1\}} \mathbb{I}_{\{\frac{1}{u} \leq v \leq u\}}.$$

Exemplo 2.22: Razão de Exponenciais

Sejam X e Y independentes e exponenciais com parâmetro $\lambda = 1$. Qual a lei conjunta de X e $Z = \frac{X}{Y}$? E a lei de $\frac{X}{Y}$?