

# Convergência Fraca de Medidas

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

# Prova da implicação (c) do Teorema 3.21

Seja  $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$  fracamente, então (c) vale (a recíproca é óbvia).

Sejam  $f^*$  e  $f_*$  as duas funções definidas como

$$f_*(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) \quad f^*(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y). \quad (3.18)$$

No Lema 3.22 provamos que  $f_*$  é s.c.i. enquanto  $f^*$  é s.c.s.

Claramente  $f_* \leq f \leq f^*$ . Além disso, estas três funções coincidem no conjunto  $C$  de pontos de continuidade de  $f$ ; como assumimos  $\mu(C^c) = 0$ , elas são limitadas  $\mu$ -q.s. e

$$\int_E f_* d\mu = \int_E f d\mu = \int_E f^* d\mu.$$

# Prova (continuação)

Agora (3.15) e (3.16) dão

$$\int_E f d\mu = \int_E f_* d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_* d\mu_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n,$$

$$\int_E f d\mu = \int_E f^* d\mu \geq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f^* d\mu_n \geq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n$$

o que fornece

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n \geq \int_E f d\mu \geq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n,$$

completando a prova.

## Lema 3.22

As funções  $f_*$  e  $f^*$  em (3.18) são s.c.i. e s.c.s. respectivamente.

**Prova:** Seja  $x \in E$ . Devemos provar que, para todo  $\delta > 0$ , existe uma vizinhança  $U_\delta$  de  $x$  tal que  $f_*(z) \geq f_*(x) - \delta$  para todo  $z \in U_\delta$ . Pela definição de  $\lim$ , existe uma vizinhança  $V_\delta$  de  $x$  tal que  $f(y) \geq f_*(x) - \delta$  para todo  $y \in V_\delta$ .

Se  $z \in V_\delta$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $z$  tal que  $V \subset V_\delta$ , de modo que  $f(y) \geq f_*(x) - \delta$  para todo  $y \in V$ . Isso implica que  $f_*(z) = \lim_{y \rightarrow z} f(y) \geq f_*(x) - \delta$ . Podemos então escolher  $U_\delta = V_\delta$  e provamos que  $f_*$  é s.c.i. O argumento para  $f^*$  é o mesmo.

# Convergência de medidas de conjuntos

Suponha que  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$  fracamente e  $A \in \mathcal{B}(E)$ . Podemos dizer que  $\mu_n(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)$ ? O Teorema 3.21 dá algumas respostas.

Se  $G \subset E$  é um conjunto aberto, então sua função indicadora  $1_G$  é s.c.i. e por (3.15)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E 1_G d\mu_n \geq \int_E 1_G d\mu = \mu(G). \quad (3.19)$$

# Intuição e exemplo

Para dar alguma intuição, pense em uma sequência de pontos  $(x_n)_n \subset G$  convergindo para algum ponto  $x \in \partial G$ . É fácil verificar que  $\delta_{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_x$  fracamente e teríamos  $\delta_{x_n}(G) = 1$  para todo  $n$  mas  $\delta_x(G) = 0$ , pois o ponto limite  $x$  não pertence a  $G$ .

Similarmente, se  $F$  é fechado então  $1_F$  é s.c.s. e

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E 1_F d\mu_n \leq \int_E 1_F d\mu = \mu(F). \quad (3.20)$$

# Condição para convergência das medidas

Claro que temos  $\mu_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$ , seja  $A$  um aberto ou fechado, se sua fronteira  $\partial A$  for  $\mu$ -negligível: na verdade  $\partial A$  é o conjunto de pontos de descontinuidade de  $1_A$ .

Reciprocamente, se (3.19) vale para todo aberto  $G$  (resp. se (3.20) vale para todo fechado  $F$ ) pode-se provar que  $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$  (Exercício 3.17).

## Critério em $\mathbb{R}$ (Proposição 3.23)

Sejam  $\mu, \mu_n, n \geq 1$ , probabilidades em  $\mathbb{R}$  e denotemos por  $F_n, F$  as respectivas funções de distribuição. Então  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$  fracamente se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{para todo ponto de continuidade } x \text{ de } F. \quad (3.21)$$

**Prova:** Suponha que  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$  fracamente. Sabemos que se  $x$  é ponto de continuidade de  $F$  então  $\mu(\{x\}) = 0$ . Como  $\{x\}$  é a fronteira de  $] - \infty, x]$ , pelo Teorema 3.21 (c),

$$F_n(x) = \mu_n(] - \infty, x]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(] - \infty, x]) = F(x).$$

# Prova da recíproca

Reciprocamente, suponha que (3.21) vale. Se  $a$  e  $b$  são pontos de continuidade de  $F$  então

$$\mu_n([a, b]) = F_n(b) - F_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(b) - F(a) = \mu([a, b]). \quad (3.22)$$

Como os pontos de descontinuidade da função crescente  $F$  são no máximo enumeráveis, (3.21) vale para  $x$  em um conjunto  $D$  denso em  $\mathbb{R}$ . Graças à Proposição 3.19, precisamos apenas provar que  $\mu_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(f)$  para toda  $f \in C_K(\mathbb{R})$ ; isto seguirá de uma adaptação do argumento de aproximação da integral por suas somas de Riemann.

# Aproximação por somas de Riemann

Como  $f$  é uniformemente contínua, para  $\epsilon > 0$  fixo seja  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  sempre que  $|x - y| < \delta$ . Sejam  $z_0 < z_1 < \dots < z_N$  uma partição em um intervalo contendo o suporte de  $f$  tal que  $z_k \in D$  e  $|z_k - z_{k-1}| \leq \delta$ . Isto é possível, pois  $D$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

Se

$$S_n = \sum_{k=1}^N f(z_k)(F_n(z_k) - F_n(z_{k-1})), \quad S = \sum_{k=1}^N f(z_k)(F(z_k) - F(z_{k-1}))$$

então, como os  $z_k$  são pontos de continuidade de  $F$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Temos

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| \leq \left| \int f d\mu_n - S_n \right| + |S_n - S| + \left| \int f d\mu - S \right| \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu_n - S_n \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(x) - f(z_k)) d\mu_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} |f(x) - f(z_k)| d\mu_n(x) \\ &\leq \epsilon \sum_{k=1}^N \mu_n([z_{k-1}, z_k]) = \epsilon (F(z_N) - F(z_0)) \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (3.24)$$

# Conclusão da prova

Similarmente,

$$\left| \int f d\mu - S \right| \leq \epsilon.$$

De (3.23) obtemos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| \leq 2\epsilon$$

e o resultado segue da arbitrariedade de  $\epsilon$ .

## Exemplo 3.24 (a)

$\mu_n = \delta_{1/n}$  (massa de Dirac em  $\frac{1}{n}$ ). Então  $\mu_n \rightarrow \delta_0$  fracamente. De fato, se  $f \in C_b(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) = \int_{\mathbb{R}} f d\delta_0.$$

Note que se  $G = ]0, 1[$  então  $\mu_n(G) = 1$  para todo  $n$  e portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) = 1$  enquanto  $\delta_0(G) = 0$ . Neste caso  $\mu_n(G) \not\rightarrow \delta_0(G)$ ; note que  $\partial G = \{0, 1\}$  e  $\delta_0(\partial G) > 0$ .

## Exemplo 3.24 (a) continuação

Mais geralmente, pelo argumento acima, se  $(x_n)_n$  é uma sequência no espaço métrico  $E$  e  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ , então  $\delta_{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta_x$  fracamente.

(b)  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k/n}$ . Ou seja,  $\mu_n$  é uma soma de massas de Dirac, cada uma de peso  $\frac{1}{n}$ , posicionadas em  $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ .

## Exemplo 3.24 (b) continuação

Intuitivamente, a massa total é fragmentada em um número crescente de massas de Dirac cada vez menores e igualmente espaçadas. Isso sugere um limite que é uniforme no intervalo  $[0, 1]$ .

Formalmente, se  $f \in C_b(\mathbb{R})$  então

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

No lado direito reconhecemos, com alguma imaginação, a soma de Riemann de  $f$  no intervalo  $[0, 1]$  em relação à partição  $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ .

## Exemplo 3.24 (b) conclusão

Como  $f$  é contínua, as somas de Riemann convergem para a integral e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_0^1 f(x) dx,$$

o que prova que  $(\mu_n)_n$  converge fracamente para a distribuição uniforme em  $[0, 1]$ . O mesmo resultado pode ser obtido calculando o limite das funções características ou das f.d.'s.

## Exemplo 3.24 (c)

$\mu_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ . Vamos provar que  $(\mu_n)_n$  converge para uma lei de Poisson de parâmetro  $\lambda$ ; i.e., a aproximação de uma lei binomial  $B(n, p)$  com  $n$  grande e  $p$  pequeno por uma distribuição de Poisson é na verdade um resultado de convergência fraca.

Podemos ver isso de várias formas. Até agora conhecemos três métodos para provar convergência fraca:

- 1 A definição;
- 2 A convergência das funções de distribuição (Proposição 3.23, apenas para probabilidades em  $\mathbb{R}$ );
- 3 A convergência das funções características (para probabilidades em  $\mathbb{R}^d$ ).

## Exemplo 3.24 (c) continuação

Neste caso, por exemplo, a f.d.  $F$  do limite é contínua em todos os pontos, exceto nos inteiros positivos. Se  $x > 0$ , então

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = F(x)$$

pois na soma só aparece um número finito de termos ( $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função "parte inteira"). Se  $x < 0$  não há o que provar, pois  $F_n(x) = 0 = F(x)$ .

## Exemplo 3.24 (c) por funções características

Também podemos calcular as funções características e seu limite: lembrando do Exemplo 2.25

$$\hat{\mu}_n(\theta) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{i\theta}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{i\theta} - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(e^{i\theta} - 1)}.$$

que é a função característica de uma lei de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , e o Teorema de P. Lévy 3.20 dá  $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Pois}(\lambda)$ .

## Exemplo 3.24 (d)

$\mu_n \sim N(b, \frac{1}{n})$ . As leis  $\mu_n$  têm densidade dada por curvas em forma de sino centradas em  $b$  que se tornam mais altas e estreitas com  $n$ . Isso sugere que as  $\mu_n$  tendem a se concentrar em torno de  $b$ .

Também aqui podemos investigar a convergência calculando o limite das f.d.'s ou das funções características. Este último método é o mais simples:

$$\widehat{\mu}_n(\theta) = e^{ib\theta} e^{-\frac{1}{2n}\theta^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{ib\theta}$$

que é a função característica de uma massa de Dirac  $\delta_b$ , de acordo com a intuição.

## Exemplo 3.24 (e)

$\mu_n \sim N(0, n)$ . A densidade de  $\mu_n$  é

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2n}x^2}.$$

Como  $g_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$  para todo  $x$ , temos para toda  $f \in C_K(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) d\mu_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) g_n(x) dx = 0.$$

Logo  $(\mu_n)_n$  não pode convergir para uma probabilidade.

## Exemplo 3.24 (e) continuação

Isso também pode ser provado via funções características: de fato

$$\hat{\mu}_n(\theta) = e^{-\frac{n}{2}\theta^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{se } \theta = 0, \\ 0 & \text{se } \theta \neq 0. \end{cases}$$

O limite não é contínuo em 0 e não pode ser uma função característica.

## Teorema de Scheffe 3.25

Sejam  $\mu_n, \mu$  probabilidades em um espaço de medida  $\sigma$ -finito  $(E, \mathcal{E}, \rho)$  com densidades  $f_n, f$  respectivamente em relação a  $\rho$  e suponha que  $f_n \rightarrow f$  pontualmente quando  $n \rightarrow \infty$ . O que pode ser dito sobre a convergência fraca de  $(\mu_n)_n$ ? O Corolário 3.26 abaixo dá uma resposta. É um caso particular de um enunciado mais geral.

**Teorema 3.25 (Teorema de Scheffe):** Seja  $(E, \mathcal{E}, \rho)$  um espaço de medida  $\sigma$ -finito e  $(f_n)_n$  uma sequência de funções mensuráveis positivas tal que

(a)  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$   $\rho$ -q.s. para alguma função mensurável  $f$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\rho = \int_E f d\rho < +\infty$ .

Então  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  em  $L^1(\rho)$ .

# Prova do Teorema de Scheffe

Temos

$$\|f - f_n\|_1 = \int_E |f - f_n| d\rho = \int_E (f - f_n)^+ d\rho + \int_E (f - f_n)^- d\rho. \quad (3.24)$$

Vamos provar que as duas integrais do lado direito tendem a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $f$  e  $f_n$  são positivas, temos

- Se  $f \geq f_n$  então  $(f - f_n)^+ = f - f_n \leq f$ .
- Se  $f \leq f_n$  então  $(f - f_n)^+ = 0$ .