

Convergência em Lei e Integrabilidade Uniforme

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Conclusão da Prova do Teorema de Scheffe

Em qualquer caso $(f - f_n)^+ \leq f$. Como $(f - f_n)^+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ q.s. e f é integrável, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f - f_n)^+ d\rho = 0.$$

Como $f - f_n = (f - f_n)^+ - (f - f_n)^-$, temos também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f - f_n)^- d\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f - f_n)^+ d\rho - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f - f_n) d\rho = 0$$

e, voltando a (3.24), o resultado segue.

Corolário 3.26

Sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$ probabilidades em um espaço topológico E e suponhamos que existe uma medida σ -finita ρ em E tal que μ e μ_n têm densidades f e f_n respectivamente em relação a ρ . Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \rho\text{-q.s.}$$

Então $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ fracamente e também $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(E)$.

Prova do Corolário 3.26

Como $\int f_n d\rho = \int f d\rho = 1$, as condições (a) e (b) do Teorema 3.25 são satisfeitas, logo $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ em L^1 . Se $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e limitada, então

$$\left| \int_E \phi d\mu_n - \int_E \phi d\mu \right| = \left| \int_E \phi(f - f_n) d\rho \right| \leq \|\phi\|_\infty \int_E |f - f_n| d\rho.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \phi d\mu_n = \int_E \phi d\mu$$

o que prova a convergência fraca e, para $\phi = 1_A$, também a última afirmação.

3.5 Convergência em Lei

Sejam $X, X_n, n \geq 1$, v.a.'s com valores no mesmo espaço topológico E e sejam $\mu, \mu_n, n \geq 1$ suas respectivas leis. A convergência de leis nos permite definir uma forma de convergência de v.a.'s.

Definição 3.27

Uma sequência $(X_n)_n$ de v.a.'s com valores no espaço topológico E é dita convergir para X em lei (e escrevemos $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$) se e somente se $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ fracamente.

Observação 3.28

Como

$$E[f(X_n)] = \int_E f(x) d\mu_n(x), \quad E[f(X)] = \int_E f(x) d\mu(x), \quad (3.25)$$

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

para toda função contínua limitada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Se E é um espaço métrico separável localmente compacto, é suficiente verificar (3.25) para toda $f \in C_K(E)$ apenas (Proposição 3.19).

Comparação com outras convergências

(Proposição 3.29)

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s com valores no espaço métrico E .
Então

(a) $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ implica $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$.

(b) Se $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ e X é uma v.a. constante, i.e., tal que

$P(X = x_0) = 1$ para algum $x_0 \in E$, então $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$.

Lembrando da Observação 3.28, vamos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = E[f(X)] \quad (3.26)$$

para toda função contínua limitada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Usemos o Critério 3.8 (critério da sub-subsequência): (3.26) segue se for mostrado que de toda subsequência de $(E[f(X_n)])_n$ podemos extrair uma subsequência adicional ao longo da qual (3.26) vale.

Prova de (a) continuação

Pelo Teorema 3.9(b), de toda subsequência de $(X_n)_n$ pode-se extrair uma subsequência adicional $(X_{n_k})_k$ convergindo para X q.s. Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} f(X_{n_k}) = f(X)$ q.s. e, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[f(X_{n_k})] = E[f(X)].$$

Prova de (b)

Denotemos por B_δ a bola aberta centrada em x_0 com raio δ ; então podemos escrever $P(d(X_n, x_0) \geq \delta) = P(X_n \in B_\delta^c)$. B_δ^c é um conjunto fechado com probabilidade 0 para a lei de X , que é a massa de Dirac δ_{x_0} . Logo, por (3.20),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(d(X_n, x_0) \geq \delta) \leq P(d(X, x_0) \geq \delta) = 0.$$

Observação sobre convergência em lei

A convergência em lei é portanto a mais fraca de todas as convergências vistas até agora: q.s., em probabilidade e em L^p . Além disso, note que, para que ela ocorra, não é nem necessário que as v.a.'s estejam definidas no mesmo espaço de probabilidade.

Exemplo 3.30 (Assintótica das Leis de Student)

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s tal que $X_n \sim t(n)$. Vamos provar que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ onde $X \sim N(0, 1)$.

Sejam $Z, Y_n, n = 1, 2, \dots$, v.a.'s independentes com $Z \sim N(0, 1)$ e $Y_n \sim \chi^2(1)$ para todo n . Então $S_n = Y_1 + \dots + Y_n \sim \chi^2(n)$ e S_n é independente de Z . Logo a v.a.

$$T_n \frac{Z}{\sqrt{S_n}} \sqrt{n} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}$$

tem uma lei de Student $t(n)$. Pela Lei dos Grandes Números, $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(Y_1) = 1$ q.s. e portanto $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.s.} Z$.

Conclusão do exemplo

Como convergência q.s. implica convergência em lei, temos

$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$ e como $X_n \sim T_n$ para todo n , também temos

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z.$

Método indireto para convergência em lei

Este exemplo introduz um método indireto para determinar a convergência em lei de uma sequência $(X_n)_n$: basta construir outra sequência $(W_n)_n$ tal que

- 1 $X_n \sim W_n$ para todo n .
- 2 $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} W$ q.s. (ou em probabilidade).

Então $(X_n)_n$ converge em lei para W .

Exemplo 3.31 (Polinômios de Bernstein)

A noção de convergência está intimamente relacionada à de aproximação. Como aplicação, vejamos uma prova do fato de que os polinômios são densos no espaço $C([0, 1])$ das funções contínuas reais no intervalo $[0, 1]$ com relação à norma uniforme.

Seja, para $x \in [0, 1]$, $(X_n^x)_n$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. com lei Bernoulli $B(1, x)$ e seja $S_n^x = X_1^x + \cdots + X_n^x$ de modo que $S_n^x \sim B(n, x)$. Seja $f \in C([0, 1])$. Então

$$\mathbb{E} \left[f\left(\frac{1}{n} S_n^x\right) \right] = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Polinômio de Bernstein

O lado direito da relação anterior é uma função polinomial da variável x (o polinômio de Bernstein de f de grau n). Denotemo-lo por $P_n^f(x)$. Pela Lei dos Grandes Números, $\frac{1}{n}S_n^x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ q.s., logo também em lei e

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(\frac{1}{n}S_n^x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(x)$$

for any $f \in C_b([0, 1])$. Portanto a sequência de polinômios $(P_n^f)_n$ converge pontualmente para f .

Convergência uniforme

Vamos demonstrar que a convergência é de fato uniforme. Como f é uniformemente contínua, para $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ sempre que $|y - x| \leq \delta$. Então, para todo $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |P_n^f(x) - f(x)| &\leq E \left[\left| f\left(\frac{1}{n}S_n^x\right) - f(x) \right| \right] \\ &= E \left[\left| f\left(\frac{1}{n}S_n^x\right) - f(x) \right| 1_{\left\{ \left| \frac{1}{n}S_n^x - x \right| \leq \delta \right\}} \right] \\ &\quad + E \left[\left| f\left(\frac{1}{n}S_n^x\right) - f(x) \right| 1_{\left\{ \left| \frac{1}{n}S_n^x - x \right| > \delta \right\}} \right] \\ &\leq \epsilon + 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x - x\right| > \delta\right). \quad (3.1) \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Chebyshev

Pela desigualdade de Chebyshev e notando que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ para $x \in [0, 1]$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x - x\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \text{Var}\left(\frac{1}{n}S_n^x\right) \leq \frac{1}{n\delta^2} x(1-x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

e portanto, para n grande,

$$\|P_n^f - f\|_\infty \leq 2\epsilon.$$

3.6 Integrabilidade Uniforme

Definição 3.32: Uma família $\mathcal{H}$ de v.a.'s m -dimensionais é uniformemente integrável se

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{H}} \int_{\{|Y| > R\}} |Y| dP = 0.$$

Exemplo simples

O conjunto formado por uma única v.a. integrável Y é o exemplo mais simples de uma família uniformemente integrável: de fato $\lim_{R \rightarrow +\infty} |Y|1_{\{|Y|>R\}} = 0$ q.s. e, como $|Y|1_{\{|Y|>R\}} \leq |Y|$, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|Y|>R\}} |Y| dP = 0.$$

Condição de dominância

Por um argumento similar, se existe uma v.a. real integrável Z tal que $Z \geq |Y|$ q.s. para todo $Y \in \mathcal{H}$, então $\mathcal{H}$ é uniformemente integrável, pois neste caso $\{|Y| > R\} \subset \{Z > R\}$ q.s. e

$$\int_{\{|Y| > R\}} |Y| dP \leq \int_{\{Z > R\}} Z dP \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{H}.$$

Observação importante

Note, no entanto, que para que uma família de v.a.'s $\mathcal{H}$ seja uniformemente integrável não é necessário que elas estejam definidas no mesmo espaço de probabilidade: de fato

$$\int_{\{|Y|>R\}} |Y| dP = \int_{\{|Y|>R\}} |y| d\mu_Y(y)$$

de modo que a integrabilidade uniforme é uma condição concernente apenas às leis das v.a.'s de $\mathcal{H}$.

Limitação em L^1

Note que uma família uniformemente integrável $\mathcal{H}$ é necessariamente limitada em L^1 : se $R > 0$ é tal que

$$\sup_{Y \in \mathcal{H}} \int_{\{|Y| > R\}} |Y| dP \leq 1,$$

então, para todo $Y \in \mathcal{H}$,

$$E(|Y|) = \int_{\{|Y| \leq R\}} |Y| dP + \int_{\{|Y| > R\}} |Y| dP \leq R + 1.$$

Caracterização (Proposição 3.33)

Uma família $\mathcal{H}$ de v.a.'s é uniformemente integrável se e somente se

- (i) $\mathcal{H}$ é limitada em L^1 e
- (ii) para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in \mathcal{H}$

$$\int_A |Y| dP \leq \epsilon \quad \text{sempre que } P(A) \leq \delta. \quad (3.27)$$

Prova (necessidade)

Se $\mathcal{H}$ é uniformemente integrável, já sabemos que é limitada em L^1 . Além disso, para todo evento A temos

$$\begin{aligned}\int_A |Y| dP &= \int_{A \cap \{|Y| < R\}} |Y| dP + \int_{A \cap \{|Y| \geq R\}} |Y| dP \\ &\leq \int_{\{|Y| \geq R\}} |Y| dP + RP(A) = I_1 + I_2\end{aligned}$$

e agora basta escolher R tal que $I_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$ e então $\delta \leq \frac{\epsilon}{2R}$.

Prova da Caracterização (continuação)

Reciprocamente, se (i) e (ii) valem, seja M um limitante superior das normas L^1 das v.a.'s de $\mathcal{H}$. Seja $\epsilon > 0$. Então, pela desigualdade de Markov, para toda $Y \in \mathcal{H}$,

$$P(|Y| \geq R) \leq \frac{E(|Y|)}{R} \leq \frac{M}{R}$$

de modo que, se $R \geq \frac{M}{\delta}$, então $P(|Y| \geq R) \leq \delta$ e, por (3.27),

$$\int_{\{|Y| \geq R\}} |Y| dP \leq \epsilon$$

para toda $Y \in \mathcal{H}$, provando assim a integrabilidade uniforme.

Sequências Convergentes em L^1 são U.I.

Como consequência da Proposição anterior, uma sequência $(Y_n)_n$ convergindo em L^1 para uma v.a. Y é uniformemente integrável. De fato, ela também é limitada em L^1 , de modo que, denotando por M um limitante superior das normas L^1 das Y_n , pela desigualdade de Markov,

$$P(|Y_n| \geq R) \leq \frac{M}{R}. \quad (3.28)$$

Como $|Y_n| \leq |Y_n - Y| + |Y|$,

$$E(|Y_n|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) \leq E(|Y_n - Y|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) + E(|Y|1_{\{|Y_n| \geq R\}}). \quad (3.29)$$

Seja δ tal que $E(|Y|1_A) \leq \epsilon$ se $P(A) \leq \delta$ (a família $\{Y\}$ é uniformemente integrável).

Continuação da prova

Então, para $R \geq \frac{M}{\delta}$, por (3.28) temos $P(|Y_n| \geq R) \leq \delta$ e portanto $E(|Y|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) \leq \epsilon$.

Seja agora n_0 tal que $\|Y_n - Y\|_1 \leq \epsilon$ para $n > n_0$. Então (3.29) dá

$$E(|Y_n|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) \leq \|Y_n - Y\|_1 + E(|Y|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) \leq 2\epsilon \quad (3.30)$$

para $n > n_0$. Como cada uma das v.a.'s Y_k é, individualmente, uniformemente integrável, existem $R_1, \dots, R_{n_0}$ tais que $E(|Y_i|1_{\{|Y_i| \geq R_i\}}) \leq \epsilon$ para $i = 1, \dots, n_0$.

Conclusão da prova

Possivelmente substituindo R pelo maior entre $R_1, \dots, R_{n_0}, R$, temos $E(|Y_n|1_{\{|Y_n| \geq R\}}) \leq 2\epsilon$ para todo n .

Teorema 3.34 (Extensão do Teorema de Lebesgue)

Seja $(Y_n)_n$ uma sequência de v.a.'s em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ convergindo q.s. para Y . Então a convergência ocorre em L^1 se e somente se $(Y_n)_n$ for uniformemente integrável.

Prova do Teorema 3.34

A parte "somente se" já está provada. Reciprocamente, suponhamos que $(Y_n)_n$ seja uniformemente integrável. Então, pelo Lema de Fatou,

$$E(|Y|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(|Y_n|) \leq M,$$

onde M é um limitante superior das normas L^1 das Y_n . Além disso, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} E(|Y - Y_n|) &= E(|Y - Y_n|1_{\{|Y - Y_n| \leq \epsilon\}}) \\ &\quad + E(|Y - Y_n|1_{\{|Y - Y_n| \geq \epsilon\}}) \\ &\leq \epsilon + E(|Y_n|1_{\{|Y_n - Y| > \epsilon\}}) \\ &\quad + E(|Y|1_{\{|Y_n - Y| > \epsilon\}}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Prova (continuação)

Como convergência q.s. implica convergência em probabilidade, temos, para n grande, $P(|Y_n - Y| > \epsilon) \leq \delta$ (δ como no enunciado da Proposição 3.33) de modo que

$$E(|Y_n|1_{\{|Y_n - Y| > \epsilon\}}) \leq \epsilon, \quad E(|Y|1_{\{|Y_n - Y| > \epsilon\}}) \leq \epsilon$$

e, para n grande, temos $E(|Y - Y_n|) \leq 3\epsilon$.

Critério para Integrabilidade Uniforme (Proposição 3.35)

Seja $\mathcal{H}$ uma família de v.a.'s e suponha que existe uma função mensurável $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, limitada inferiormente, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Phi(t) = +\infty$ e

$$\sup_{Y \in \mathcal{H}} E [\Phi(|Y|)] < +\infty.$$

Então $\mathcal{H}$ é uniformemente integrável.

Prova da Proposição 3.35

Seja Φ como no enunciado. Podemos assumir que Φ é positiva; caso contrário, se $\Phi \geq -r$, basta substituir Φ por $\Phi + r$.

Seja $K > 0$ tal que $E[\Phi(|Y|)] \leq K$ para toda $Y \in \mathcal{H}$ e seja $\epsilon > 0$ fixado. Seja R_0 tal que $\frac{1}{K}\Phi(R) \geq \frac{K}{\epsilon}$ para $R > R_0$, i.e., $|Y| \leq \frac{\epsilon}{K}\Phi(|Y|)$ para $|Y| \geq R_0$ e para toda $Y \in \mathcal{H}$. Então, para toda $Y \in \mathcal{H}$,

$$\int_{\{|Y| > R_0\}} |Y| dP \leq \frac{\epsilon}{K} \int_{\{|Y| > R_0\}} \Phi(|Y|) dP \leq \frac{\epsilon}{K} \int \Phi(|Y|) dP \leq \epsilon.$$

Em particular, tomando $\Phi(t) = t^p$, subconjuntos limitados de L^p , $p > 1$, são uniformemente integráveis.