

O Teorema do Limite Central

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

3.8 O Teorema do Limite Central

Apresentamos agora o resultado mais clássico de convergência em lei.

Teorema 3.40 (Teorema do Limite Central) Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. d -dimensionais, com média b e matriz de covariância C e seja

$$S_n^* = \frac{X_1 + \cdots + X_n - nb}{\sqrt{n}}.$$

Então S_n^* converge em lei para uma distribuição gaussiana multivariada $N(0, C)$.

Prova do Teorema do Limite Central

A prova resume-se ao cálculo do limite das funções características das v.a.'s S_n^* , para logo aplicar o Teorema de P. Lévy.

Se $Y_k = X_k - b$, então as Y_k são centradas, têm a mesma matriz de covariância C e $S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$. Denotemos por ϕ a função característica comum das Y_k .

Continuação da prova

Então, lembrando as fórmulas da função característica de uma soma de v.a.'s independentes e de sua transformação sob mapas lineares,

$$\phi_{S_n^*}(\theta) = \phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \left(\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right)^n.$$

Esta é uma forma clássica $[1^\infty]$. Vamos calcular a expansão de Taylor de segunda ordem de ϕ em $\theta = 0$: lembrando que

$$\phi'(0) = iE(Y_1) = 0, \quad \text{Hess } \phi(0) = -C,$$

temos

$$\phi(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle + o(|\theta|^2).$$

Continuação da prova

Portanto, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1 = -\frac{1}{2n}\langle C\theta, \theta \rangle + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

e, como $\log(1+z) \sim z$ para $z \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{S_n^*}(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[n \log \left(1 + \left(\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[n \left(\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[-\frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle + o(1) \right] = e^{-\frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle},\end{aligned}$$

que é a função característica de uma distribuição $N(0, C)$.

Corolário 3.41 (caso real)

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s reais i.i.d. com média b e variância σ^2 . Então, se

$$S_n^* = \frac{X_1 + \cdots + X_n - nb}{\sigma\sqrt{n}}$$

temos $S_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1)$.