

Experimentos Aleatórios e Espaço Amostral

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

O que são Probabilidade e Estatística?

No nosso dia a dia estamos frequentemente tentando entender mais claramente os problemas que nos cercam. Fazemos isso para tentar tomar decisões mais “acertadas” (ou ao menos mais embasadas).

Essas iterações estão constantemente cobertas de incertezas, e lidar com elas pode ser difícil e frustrante. Deste modo, torna-se interessante que consigamos entendê-las, minimizá-las e, quem sabe até usá-las a nosso favor.

A probabilidade e a estatística são áreas da matemática que se ocupam de estudar, modelar e entender essas incertezas.

Existem ao menos duas frentes a serem atacadas neste esforço de entender e modelar incertezas.

- 1 Precisamos estabelecer bem as regras do jogo. Regras fundamentais que os modelos devem atender, e consequências teóricas que nos ajudem a melhor entender os problemas que enfrentamos;
- 2 Com base nestas regras, é necessário entender como representar o “mundo real”. Como lidar com dados, como extrair informações deles e qual o nível que confiança que podemos ter nas conclusões tiradas.

De maneira um tanto simplista, mas ainda assim útil, podemos pensar que a probabilidade se encarrega do item 1 acima, enquanto a estatística trata do item 2.

Nos slides que seguem começaremos nosso estudo da parte teórica desta empreitada. Ou seja, iniciaremos o estudo da teoria das probabilidades.

O primeiro passo é caracterizar a fonte das incertezas a serem modeladas, que chamaremos de **experimentos aleatórios**.

A seguir passaremos para a maneira de organizar e representar as incertezas geradas pelo experimento.

É importante observar que este é um curso introdutório, onde vamos estudar apenas os aspectos mais básicos da teoria. Mas são estes os principais fundamentos usados em cursos avançados para construir os modelos e teorias mais complexas.

Começemos com dois exemplos de *experimentos* simples

Exemplo 1

Soltamos uma bola de altura fixa conhecida e cronometramos o tempo que ela toma para chegar ao chão. Para evitar erros humanos, considere que todas as medidas e processos são feitos por máquinas de precisão “infinita” (não sujeita a erros).

Exemplo 2

Jogamos um dado, com 6 lados iguais e perfeitamente balanceado, descuidadamente em cima da mesa se deixamos rolar até que pare. Anotamos então o valor na face que aponta para cima.

Vamos analisar os dois exemplos e tentar compará-los.

- Exemplo 1:

- Se soltarmos a bola sempre da mesma altura, o primeiro experimento nos devolverá sempre o mesmo resultado.
- Podemos não saber de antemão qual resultado será esse, mas a cada vez que o experimento for repetido, o resultado será o mesmo.

- Exemplo 2:

- Assim que o dado deixa nossa mão, perdemos o controle sobre o seu comportamento, e não temos como prever o resultado.
- Cada vez que o experimento é repetido, o resultado pode ser potencialmente diferente, impondo uma incerteza grande ao resultado.

- O exemplo 1 nos descreve um experimento onde o resultado final é sempre o mesmo, a cada vez que o repetimos.
- Dizemos então que este é um **experimento determinístico** (onde o resultado final é bem determinado).
- Já o exemplo 2 nos descreve um experimento onde o resultado final é incerto, sendo potencialmente diferente a cada realização do experimento.
- Dizemos então que se trata de um **experimento aleatório**.

Definição 1

Chamaremos de **Experimento Determinístico** aquele cujo resultado final é bem determinado. Ou seja, um experimento que a cada repetição apresenta o mesmo resultado.

Definição 2

Chamaremos de **Experimento Aleatório** aquele cujo resultado final carregue incerteza, sendo potencialmente diferente a cada repetição do experimento.

- Abrir uma caixa com bolas pretas e vermelhas, e contar o total de bolas de cada cor é um experimento **determinístico**.
- Balançar a mesma caixa e, sem olhar, pegar uma bola, retirar da caixa e observar a cor é um experimento **aleatório**.
- Perguntar ao vizinho em quem ele votou na última eleição para síndico é um experimento **determinístico**.
- Sortear um número de apartamento e perguntar para o morador em quem ele votou na última eleição para síndico é um experimento **aleatório**.

- Abrir um vídeo no YouTube (sempre o mesmo), e medir o tempo de duração é um experimento **determinístico**.
- Abrir o primeiro vídeo sugerido no Youtube, e medir seu tempo de duração é um experimento **aleatório** (cada vez que abrimos, a sugestão pode ter mudado e não temos controle sobre ela, impondo incerteza.)
- Medir o raio de um alvo de dardo circular (sempre o mesmo) é experimento **determinístico**.
- Lançar o dardo no alvo e medir a distância do ponto onde o dardo acertou até o centro é um experimento **aleatório**.

Ao descrever os experimentos aleatórios fizemos usos de experimentos concretos, como lançar um dado ou abrir um vídeo do YouTube.

Isso nem sempre é necessário, e por vezes lançaremos mão de descrições mais abstratas de um experimento.

Podemos, por exemplo, dizer algo como “escolha ao acaso um número entre 1 e 6”, sem descrever o ato de rolar um dado ou qualquer outro similar.

Assim, quando dissermos “escolher ao acaso um número no intervalo $[0, 1]$ ”, estamos falando de algum experimento aleatório cujo resultado é um número no intervalo $[0, 1]$.

- Uma vez que localizamos a fonte das incertezas que queremos modelar, precisamos organizá-las.
- Para isso precisamos primeiro identificar os resultados possíveis deste experimento, e quaisquer subgrupos de resultados que nos interesse estudar.

Observação 1

A linguagem já estabelecida e usada por matemáticos há séculos para o estudo da probabilidade é a da *teoria de conjuntos*.

Deste modo, é importante que o aluno esteja familiarizado ao menos com os conceitos básicos desta linguagem, como união, intersecção, conjunto complementar, etc...

Após identificar o experimento aleatório com o qual estamos trabalhando, passamos para a fase de identificar e agrupar os resultados possíveis do experimento.

- Ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, daremos o nome de ***espaço amostral***;
- Em geral, denotaremos o espaço amostral de um experimento por S ;

- 1 No experimento de determinar se uma pessoa sintomática está ou não infectada com o coronavírus, o espaço amostral pode ser escrito por

$$S = \{\text{positivo}, \text{negativo}\};$$

- 2 Um experimento que determina o tempo em horas que um medicamento começa a ter efeito, pode ter espaço amostral

$$S = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\};$$

- 3 Se o experimento aleatório consiste em lançar duas moedas, verificando se a face visível é *cara* (Ca) ou *coroa* (Co), o espaço amostral pode ser descrito por

$$S = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}.$$

- 4 Se o experimento consiste em contar o total de peças defeituosas fabricadas por dia em uma fábrica de chinelos, podemos usar um espaço amostral dado por

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, M\},$$

onde M é o total de chinelos fabricados em um dia;

- 5 Se estamos interessados no número de chamadas que passam em um dia por uma torre de comunicação de celular, o espaço amostral pode ser

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\};$$

- 6 Se o experimento aleatório consiste escolher ao acaso um ponto em um círculo de raio 1, o espaço amostral pode ser

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- 1 Um experimento aleatório consiste em lançar uma moeda seguidamente até que observemos *cara* pela primeira vez.
Que espaço amostral poderia ser usado para representar este experimento?

- 2 Em uma eleição com 5 candidatos, uma pesquisa eleitoral consiste em um experimento aleatório repetido uma quantidade grande de vezes. O experimento em questão é o de sortear um eleitor da população e perguntar sua intenção de voto.

Descreva um espaço amostral adequado para o experimento.

- Considere o experimento de rolar dois dados.
- O espaço amostral pode ser descrito como

$$\begin{aligned} S &= \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\} \\ &= \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \end{aligned}$$

- Suponha que estamos interessados nos resultados onde a soma é igual à 5.
- Estes resultados formam o subconjunto $A \subset S$ dado por

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\};$$

- Se estivermos interessados nos lançamentos onde o valor do primeiro dado é 1, teremos que trabalhar com o subconjunto $B \subset S$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

- Os subconjuntos de um espaço amostral, para os quais estamos interessados em quantificar a incerteza, serão chamados de **eventos**;
- Dizemos que um evento $E \subset S$ *ocorreu* ou *foi observado* quando o resultado da realização do experimento aleatório pertence à A ;
- Assim, seguindo o exemplo do slide anterior, se lançarmos dois dados conseguindo o resultado $(2, 3)$, podemos dizer que o evento

$$A = \{\text{a soma dos resultados é igual a 5}\}$$

foi observado, mas o evento

$$B = \{\text{o valor do primeiro dado é 1}\}$$

não ocorreu.

Dados eventos $A, B, A_1, A_2, \dots \subset S$, as seguintes interpretações são essenciais:

- o evento $A \cup B$ representa o evento onde *foi observado o evento A **ou** o evento B, indiscriminadamente*;
- analogamente, o evento $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ pode ser lido como “*ocorreu **algum** dos eventos $A_1, A_2, \dots$* ”;
- o evento $A \cap B$ representa o evento onde *foram observados o evento A **e** o evento B*;
- da mesma forma, o evento $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ pode ser lido como “***todos** os eventos $A_1, A_2, \dots$ foram observados*”;
- o evento $A^c = S - A$ (o evento complementar de A) também pode ser lido como “*o evento A não ocorreu*”;

Considere o experimento de rolar dois dados, e tome os eventos

$$\begin{aligned} E &= \{\text{a soma dos resultados é igual a 7}\} \\ &= \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F &= \{\text{o valor do segundo dado é igual a 5}\} \\ &= \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\} \end{aligned}$$

Neste caso temos

- ① $E \cup F = \{\text{a soma dos resultados é 7 **ou** o segundo dado é 5}\};$
- ② $E \cap F = \{\text{a soma é 7 **e** o segundo dado é 5}\} = \{(2, 5)\};$
- ③ $E^c = \{\text{a soma dos resultados é **diferente** de 7}\}.$

Considere o experimento de lançar uma moeda 10 vezes, e para cada $k = 1, \dots, 10$ defina

$$A_k = \{\text{no lançamento da } k\text{-ésima moeda foi observado } \textit{cara} \}.$$

Nestas condições escreva os eventos a seguir em função de $A_1, \dots, A_{10}$.

- a $E = \{\text{foram observadas 10 } \textit{caras}\};$
- b $F = \{\text{observamos ao menos uma } \textit{cara}\};$
- c $G = \{\text{observamos apenas } \textit{coroa}\};$
- d $H = \{\text{observamos ao menos uma } \textit{coroa}\};$

(**Desafio:** você consegue listar os elementos do espaço amostral S e dos eventos $A_1, \dots, A_{10}$?)