

Axiomas da Probabilidade

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



- 1 Objetivos
- 2 Propriedades Esperadas de uma Probabilidade
- 3 Definições e Notações
- 4 Definição Formal de Probabilidade
- 5 Exemplos

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

Nos slides anteriores demos início ao processo de encontrar uma maneira de representar matematicamente (modelar) as incertezas de um certo experimento. Para isso seguimos a seguinte sequência de ideias:

- 1 identificamos a fonte das incertezas (**experimento aleatório**);
- 2 agrupamos os resultados possíveis (**espaço amostral**);
- 3 chamamos os subconjuntos do espaço amostral de **eventos**, e identificamos estes como os objetos para os quais queremos “medir” a incerteza.

Nestas as notas queremos definir *como* medir incertezas. Ou seja, definir regras mínimas que nos garantam que nosso modelo ao menos faça sentido.

- dado um espaço amostral S e um evento $E \subset S$, queremos de algum modo representar numericamente a incerteza de um evento E ;
- uma maneira de fazer isso é associar ao evento E um valor numérico entre 0 e 1, onde 0 diz que o evento não tem chance de ocorrer, 1 significa 100% de certeza que o evento ocorre;
- Denotamos este valor por $P(E)$, e lemos “a probabilidade de E ”;
- Assim, $P(E) = 0,4$ significa que o evento tem 40% de chance de ocorrer;
- Em resumo dado um experimento aleatório qualquer modelo que propusermos deverá ter as seguintes propriedades:
 - 1 $P(S) = 1$ (100% de chance do resultado do experimento estar em S);
 - 2 $P(\emptyset) = 0$ (0% de chance de não ocorrer nada!);
 - 3 $0 \leq P(E) \leq 1$ para qualquer evento $E \subset S$ (definição!);

Falta pouco para definirmos de fato o que podemos chamar de um evento, mas este último passo é fundamental!

Para entender esse último passo vamos dissecar um problema simples que resolvemos na escola!

Exemplo 1 (Lançando um dado)

Lançamos um dado não-viciado com 6 faces. Calcule a probabilidade de observarmos um valor maior ou igual à 5.

Usando a linguagem vista até agora, temos o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e queremos a probabilidade do evento $E = \{5, 6\}$.

Na escola nos disseram que a probabilidade de E é o número de casos em E dividido pelo total de casos possíveis. Neste caso teríamos que

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Mas por que isso?!?!?

Listemos o que sabemos do problema:

- O dado tem 6 faces;
- O dado é não-viciado.

O segundo item acima significa que as 6 faces são geometricamente equivalentes. Nada, além do valor marcado, diferencia as faces. Nenhuma face é mais pesada ou leve que as demais.

Matematicamente, podemos modelar essa hipótese dizendo que

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p.$$

Mas como encontramos o valor de p ? Até o momento sabemos apenas que $0 \leq p \leq 1$.

- A chave para o próximo passo está em voltar para o experimento;
- Suponha que repetimos o experimento milhões de vezes. Em quantas destas jogadas esperamos ver o número 5?
- Como são 6 resultados, e nenhum deles é especial em relação aos demais (lembre-se que o dado é não-viciado), esperamos que o número 5 apareça em aproximadamente $1/6$ das jogadas;
- A resposta acima seria a mesma para cada resultado, de modo que é razoável pensar que

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

- *Resumindo a ideia central: a frequência de observação de dois eventos que não podem ocorrer ao mesmo tempo é a soma das frequências de observação dos dois eventos separados, e essa ideia deveria ser refletida pelas probabilidades!*
- Juntando as peças temos que
 - Esperamos ver o 5 em aproximadamente $1/6$ das jogadas;
 - O mesmo vale para o 6;
 - Como eles não podem ocorrer ao mesmo tempo, esperamos ver 5 **ou** 6, em $2/6$ das jogadas!
- Voltando à linguagem de conjuntos, como $\{5\} \cap \{6\} = \emptyset$, então

$$P(\{5, 6\}) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

O exemplo anterior ilustra a última propriedade que precisamos exigir que qualquer medida de incerteza (probabilidade) tenha para que seja coerente com o que esperamos!

- Tomando um espaço amostral S e eventos $E, F \subset S$, se $E \cap F = \emptyset$, então precisamos pedir que

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F).$$

- Podemos ir além, e pedir que se $A_1, \dots, A_n$ são eventos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

- E dando mais um passo, podemos pedir que se $A_1, A_2, \dots$ são eventos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

- Diremos que eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ em algum espaço amostral S são **mutuamente exclusivos** se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para quaisquer $i \neq j$;
- A mesma definição vale para uma coleção infinita $A_1, A_2, \dots$ de eventos;
- Fixada uma coleção $A_1, A_2, \dots$ de eventos valem as seguintes notações:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{e} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

além de

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Definição 1

Dado um espaço amostral em S definiremos por **probabilidade** em S uma função P que a cada evento $E \subset S$ associa um valor $P(E)$ (lê-se *probabilidade de E*) e satisfaz as seguintes propriedades:

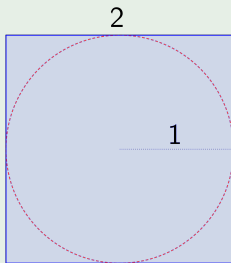
- 1 $0 \leq P(E) \leq 1$, para todo evento $E \subset S$;
- 2 $P(S) = 1$;
- 3 Se $A_1, A_2, \dots$ são eventos **mutuamente exclusivos**, então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Exemplo 2 (Calculando π com Experimentos Aleatórios)

Vamos considerar o seguinte experimento: tome uma grande superfície quadrada, com 2 metros de lado, e jogue uma pequena bolinha ao acaso nesta superfície, sem tentar acertar e nem evitar nenhum local específico.

Como calcular a probabilidade da bola cair dentro de um círculo de raio 1 com centro no meio do quadrado?



Para fazer o que ele pede, comecemos listando as hipóteses listadas e como podemos traduzir em um modelo. Neste caso a única hipótese é que

- a bola é jogada ao acaso no quadrado, sem tentar acertar ou evitar nenhuma região específica.

Primeiro escrevemos nosso espaço amostral, e neste caso S é o quadrado de lado 2.

Quanto a hipótese descrita, podemos traduzi-la pensando que a probabilidade de atingir uma região depende apenas do tamanho da região, mas não da sua posição.

Uma maneira de representar isso é dizer que dada uma região $R \subset S$ temos

$$P(R) = \alpha \cdot \text{Área}(R),$$

que diz que $P(R)$ é proporcional à área de R , com constante de proporcionalidade α .

Como $P(S) = 1$, concluímos que

$$1 = P(S) = \alpha \cdot \text{Área}(S) = \alpha \cdot 4,$$

e portanto $\alpha = \frac{1}{4}$ e

$$P(R) = \frac{\text{Área}(R)}{4}.$$

Com o modelo em mãos podemos calcular o que ele pede! De acordo com nosso modelo, a probabilidade de acertar o círculo C de raio 1 é dada por

$$P(C) = \frac{\text{Área}(C)}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Questão: Como podemos usar este experimento para tentar calcular o valor de π ?

Exemplo 3 (Rolando um dado viciado)

Suponha que há anos temos jogado um jogo de dados usando um certo dado viciado. Ao longo do tempo percebemos que os números pares são observados 2 vezes mais frequentemente que os números ímpares. Fora isso, não observamos nenhum outro viés.

Como no jogo em questão as rolagens de 4, 5 ou 6 nos são favoráveis, queremos calcular a probabilidade de sortearmos 4, 5 ou 6 em uma rolagem do dado.

Listemos o que sabemos

- experimento aleatório: rolar um dado viciado;
- espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- valores pares duas vezes mais frequentes que ímpares;
- nenhum outro viés.

Traduzindo as hipóteses podemos dizer que:

- 1 as hipóteses indicam que não existe diferença de frequência dentre os pares ou mesmo dentre os ímpares. Isso nos diz que

$$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = p \quad \text{e} \quad P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = q$$

- 2 Como os pares são 2 vezes mais frequentes que os ímpares, temos $q = 2p$.

Resolvendo o Exemplo

Para terminar lembramos que $P(S) = 1$, e portanto

$$\begin{aligned}1 &= P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \\&= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\&= 3p + 3q\end{aligned}$$

Assim temos que $3p + 3q = 1$ e $q = 2p$. Juntando as duas informação encontramos

$$1 = 3p + 3q = 3p + 3(2p) = 9p,$$

e assim temos $p = \frac{1}{9}$ e $q = \frac{2}{9}$.

Resumindo

$$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{9} \quad \text{e} \quad P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = \frac{2}{9},$$

e

$$P(\{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$