

Consequências da Definição de Probabilidade

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

- 1 Objetivo
- 2 Revisão
- 3 Consequências da Definição de Probabilidade

Até agora temos apresentado tanto intuitivamente como formalmente o conceito de probabilidade. Uma vez que esta ideia já está mais madura vamos começar com um trabalho mais teórico: vamos estabelecer as primeiras consequências da definição de probabilidade.

- Dado um experimento aleatório o conjunto S de todos os seus resultados possíveis é chamado de **espaço amostral**.
- Chamamos de **evento** todo subconjunto $A \subseteq S$ para os quais estamos interessados em associar uma probabilidade.

A é um evento se $A \in \mathcal{P}(S)$.

Dado um espaço amostral S , uma **probabilidade** em S é uma função P que associa a cada evento $A \subset S$ um valor real $P(A)$, que chamamos de **probabilidade** A , tal que

A1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{P}(S)$;

A2. $P(S) = 1$;

A3. Se $A_n \in \mathcal{P}(S)$, para $n \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Vamos começar com uma consequência imediata do **Axioma 3**, que é quase uma maneira de reescrevê-lo.

A propriedade diz que

se $A_1, \dots, A_n \subset S$ são eventos **mutuamente exclusivos** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Observe que a diferença desta propriedade para o **Axioma 3** é que aqui estamos considerando uma quantidade **finita** de eventos.

Podemos justificar isto fazendo $A_i := \emptyset$ para $i > n$ em **A3**.

As seguintes propriedades resultam dos axiomas que definem uma probabilidade:

1. $P(\emptyset) = 0$.

• *Prova:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \stackrel{\mathbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.

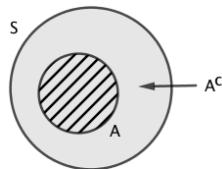
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

• *Prova:*

$$1 = P(S) \quad \text{por } \mathbf{A2}$$

$$= P(A \cup A^c)$$

$$= P(A) + P(A^c) \quad \text{por } \mathbf{A3}$$

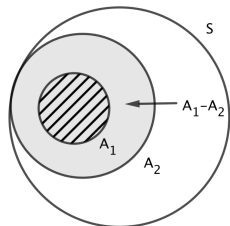


3. Se $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.

- *Prova:* Como $A_1 \subseteq A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cup (A_2 - A_1)) \\ &\stackrel{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + P(A_2 - A_1). \end{aligned}$$

Como $P(A_2 - A_1) \geq 0$, por **A1**,
concluimos que $P(A_1) \leq P(A_2)$.



4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

- *Prova:* Resulta de observar que

$$P(A_1) \stackrel{A3}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 - A_2), \quad \text{por que?}$$

$$P(A_2) \stackrel{A3}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 - A_1), \text{ e}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \stackrel{A3}{=} P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1).$$

5. $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

- *Prova:* Resulta diretamente da propriedade 4.

Resumimos as propriedades que estudamos até agora na seguinte proposição.

Proposição 1

Sejam S um espaço de amostral, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(S)$, e P uma função de probabilidade em S . Então

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
3. Se $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$;
4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;
5. $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

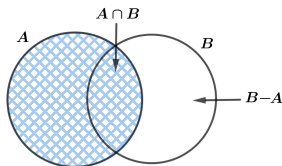
Exemplo

Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,1$ e $P(B - A) = 0,4$. Usando as propriedades básicas calcule:

- a. $P(A \cup B)$;
- b. $P(\{A \cup B\} - \{A \cap B\})$.

Solução. Como $B = \{B \cap A\} \cup \{B - A\}$, e a união é disjunta, temos que

$$\begin{aligned} P(B) &\stackrel{\text{A3}}{=} P(B \cap A) + P(B - A) \\ &= 0,1 + 0,4 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$



Por outro lado, sabemos que

$$P(A \cup B) \stackrel{\text{P4}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,5 - 0,1 = 0,6.$$

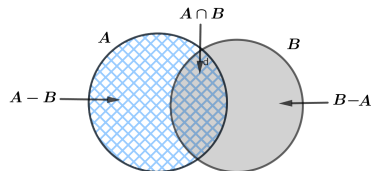
Para a parte b. observemos que

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

e que

$$\{A \cup B\} - \{A \cap B\} = \{A - B\} \cup \{B - A\},$$

é uma união de eventos mutuamente exclusivos, temos que



$$P(\{A \cup B\} - \{A \cap B\}) = P(A - B) + P(B - A) = 0,1 + 0,4 = 0,5.$$

Desta forma a resposta do item b. é dada por

$$P(\{A \cup B\} - \{A \cap B\}) = 0,5.$$

Exemplo

Sejam A e B eventos num espaço amostral tais que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ e $P(A \cap B) = 1/5$. Calcule a probabilidade de cada um dos seguintes eventos:

- a. A não ocorre
- b. B não ocorre
- c. pelo menos um de A ou B ocorre
- d. A não ocorre e B sim
- e. Ocorre exatamente um de A e B
- f. Não ocorre nenhum de A e B

Exemplo

J. leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ela gostar do primeiro livro é de 0,5, a de gostar do segundo livro é de 0,4 e a de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?

Definimos os eventos

$$B_i := \text{"J. gosta do livro } i\text{"}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Desta forma a probabilidade de que J. goste de pelo menos um dos livros é

$$P(B_1 \cup B_2) \stackrel{\text{P4}}{=} P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0,5 + 0,4 - 0,3 = 0,6.$$

Como continuamos?

Fórmula de inclusão-exclusão

Sejam A_1 , A_2 e A_3 eventos de um espaço amostral S . Queremos calcular $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. O que fazer?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(\{A_1 \cup A_2\} \cup A_3), \\ &\stackrel{\text{P4}}{=} P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P(\{A_1 \cup A_2\} \cap A_3) \\ &\stackrel{\text{P4}}{=} [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] + P(A_3) \\ &\quad - [P(\{A_1 \cap A_3\} \cup \{A_2 \cap A_3\})]. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$P(\{A_1 \cap A_3\} \cup \{A_2 \cap A_3\}) \stackrel{?}{=} P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Portanto

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3)] \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Podemos estender, usando um argumento indutivo, o trabalho que fizemos com a união de 3 eventos para uma quantidade finita de eventos.

Proposição 2

Sejam A_i com $1 \leq i \leq n$ eventos de um espaço amostral S . Então

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right). \end{aligned}$$

Proposição 3

Sejam A_i , com $i \in \mathbb{N}$, eventos de um espaço amostral S . Então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$