

Espaços Amostrais Equiprováveis

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

- Dado um experimento aleatório o conjunto S de todos os seus resultados possíveis é chamado de **espaço amostral**.
- Chamamos de **evento** todo subconjunto $A \subseteq S$ para os quais estamos interessados em associar uma probabilidade.

Dado um espaço amostral S , uma **probabilidade** em S é uma função P que associa a cada evento $A \subset S$ um valor real $P(A)$, que chamamos de **probabilidade** A , tal que

A1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento $A \subset S$;

A2. $P(S) = 1$;

A3. Se $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, são eventos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Como consequência da definição temos as seguintes propriedades.

Sejam S um espaço de amostral, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(S)$, e P uma função de probabilidade em S . Então

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
3. Se $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$;
4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;
5. $P(A_2 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

Agora vamos considerar experimentos aleatórios que com um número finito de resultados possíveis. Ou seja, vamos estudar experimentos cujo espaço amostral S tem um número finito de elementos $s_1, s_2, \dots, s_n$. Por exemplo:

- 1 Lançar uma moeda verificando se a face visível é *cara* (Ca) ou *coroa* (Co), então $S = \{Ca, Co\}$.
- 2 Rolar um dado honesto de 6 faces e a anotar o resultado obtido. Neste caso $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- 3 Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas das quais são 4 *azuis* (a) e 6 *brancas* (b) e anotar a cor da bola escolhida. Aqui $S = \{a, b\}$.

Você consegue dar exemplos de experimentos onde S não seja finito?

Num experimento onde $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ uma probabilidade P em S associa uma probabilidade p_i ao evento $\{s_i\}$.

Que propriedades devem satisfazer os p_i 's?

Da definição de probabilidade temos que

① $0 \leq p_i \leq 1$, (Ax. 1):

② $\sum_{i=1}^n P(\{s_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$, (Ax. 2 e Ax. 3).

Existem experimentos onde é natural supor qualquer elemento do espaço amostral tem a mesma possibilidade de acontecer, este seria o caso exemplo anterior, se os dados e a moeda fossem não-viciados.

No experimento das urnas se assumirmos que as bolas são idênticas (exceto pela cor), que afirmação poderíamos fazer?

Se assumirmos que os dados e a moeda não-viciados teremos:

- 1 No experimento de lançar a moeda que

$$P(\{Ca\}) = p(\{Co\}) = \frac{1}{2}.$$

- 2 No caso dos dados que

$$P(\{i\}) = p_i = \frac{1}{6}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

- Quanto é $P(\{2, 3\})$?
- Qual a probabilidade de ter um resultado ímpar?

No experimento das urnas poderíamos afirmar que $P(\{a\}) = P(\{b\})$?

Espaços amostrais com resultados igualmente prováveis

Em forma geral, quando temos um experimento aleatório cujo com espaço amostral $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ e qualquer resultado é igualmente provável, ou seja

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \dots = P(\{s_n\}),$$

então podemos afirmar que $P(\{s_i\}) = \frac{1}{n}$. Mais ainda, se $E \subseteq S$ é um evento com m elementos então $P(E) = \frac{m}{n}$. De uma maneira informal escrevemos

$$P(E) = \frac{\# \text{ resultados em } E}{\# \text{ resultado em } S},$$

ou que

$$P(E) = \frac{\# \text{ resultado favoráveis}}{\# \text{ resultados possíveis } S}.$$

O quadro das medalhas obtidas por Argentina, Brasil e Colômbia nas Olimpíadas de Rio de Janeiro 2016 é dada na seguinte tabela.

País	Ouro	Prata	Bronze
Argentina	3	1	0
Brasil	7	6	6
Colômbia	3	2	3

Uma destas medalhas é selecionada ao acaso. Qual é a probabilidade de que:

- seja da Argentina e de prata?
- seja de ouro e não seja da Colômbia?
- não seja de bronze?

Exemplo

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

S	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$S = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

- Se A é o evento “a soma dos números é 5”, então A é dado por

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Qual a probabilidade de que aconteça A ?

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\# \text{ resultados favoráveis}}{\# \text{ resultados possíveis}} \\ &= \frac{4}{36}. \end{aligned}$$

- Se B é o evento “o menor dos números é o 2”, então $B \subset S$ é dado por

$$B = \{(i, j) \in S : \min\{i, j\} = 2\}.$$

Neste caso,

$$P(B) = \frac{1}{4} \text{ (porque?).}$$

Temos uma urna com 5 moedas, sendo que: 2 destas são honestas, outras 2 têm duas caras cada (isto é, em ambos lados a moeda é cara) e a última é uma moeda com duas coroas (isto é, em ambos lados a moeda é coroa). Escolhemos uma moeda aleatoriamente desta urna e a lançamos. Observamos se obtemos cara ou coroa.

- a. Este é um experimento com resultados igualmente prováveis?
- b. Caso não seja, como podemos fazer para encontrar a probabilidade que o resultado seja coroa?

Seis bolas diferentes são colocadas ao acaso em duas urnas também diferentes. Considerando que todas as distribuições de bolas nas urnas tem a mesma probabilidade, qual é a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas?

Solução: Vamos começar identificando o espaço amostral.

Uma maneira de descrevermos um resultado possível deste experimento é usando um “vetor” do tipo $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$, onde $b_i \in 1, 2$, indicando a urna onde a bola i foi colocada.

Assim, o $S = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) : b_i \in 1, 2\}$, e o princípio multiplicativo nos dá que $|S| = 2^6 = 64$.

Queremos a probabilidade do evento $A = \{\text{as duas urnas estão ocupadas}\}$. Contar o tamanho de $|A|$ diretamente pode ser chato (você consegue fazer?), e vamos então tomar outro caminho.

Continuando a solução:

Note primeiro que $A^c = \{\text{alguma urna está vazia}\}$.

Mas como temos apenas 2 urnas, então temos apenas 2 configurações que atendem esse critério: todas as bolas na urna 1 ou todas as bolas na urna 2.

Deste modo, temos $P(A^c) = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$, e concluímos que

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Antes dos próximos exemplos, vamos descrever um baralho convencional usado em jogos de pôquer.

- 52 cartas no total;
- 26 cartas são pretas e 26 cartas são vermelhas;
- cartas pretas divididas em 2 grupos, chamados “naipes” (paus e espada);
- cartas vermelhas divididas em 2 naipes (copas e ouro);
- cada naipe possui 13 cartas com “valores” distintos. São eles:
A (Ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama), K (rei).

Exemplos

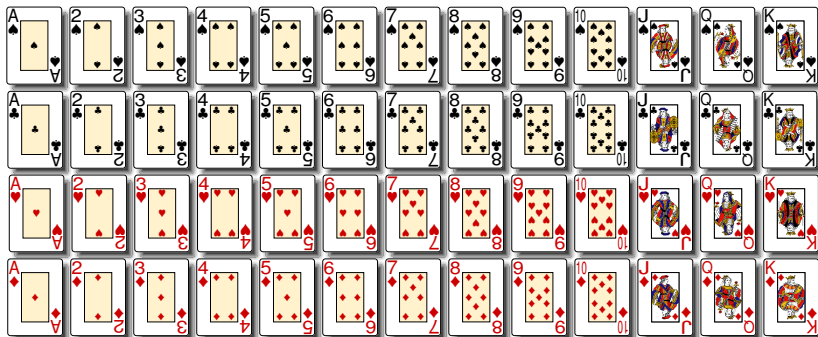


Figura: As 52 cartas de um baralho convencional. Os naipes ordenados por linha são, respectivamente, espada, paus, copas e ouro.

Em um jogo de pôquer, distribuímos 5 cartas para cada jogador. Cada um destes grupos de cartas é chamada de uma *mão*. Uma mão onde as 5 cartas são todas do mesmo naipe é chamada de *flush*. Se assumirmos que todas as mãos em um jogo de pôquer são igualmente prováveis, ao distribuímos as cartas para um jogador, qual é a probabilidade dele receber um flush?

Solução:

Para responder devemos saber que um baralho de pôquer tem 52 cartas divididas em 4 naipes.

Neste caso, o espaço amostral S é formado todos os subgrupos de 5 cartas formados a partir do total de 52. Portanto, $|S| = \binom{52}{5}$.

Definimos o evento A : "sair um flush". Quantos elementos tem A ?

É possível tirar um grupo de 5 cartas do mesmo naipe de $\binom{13}{5}$ formas diferentes. Portanto,

$$P(A) = \frac{\# \text{ casos favoráveis}}{\# \text{ casos possíveis}} = \frac{4 \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

Continuando com pôquer. Um *par* ocorre quando exatamente 2 das 5 cartas recebidas pelo jogador tem o mesmo “valor”, enquanto os “valores” das outras 3 são diferentes.

Qual a probabilidade de que ocorra um par?

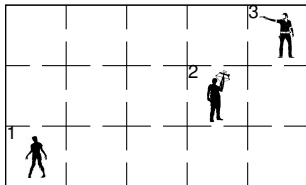
Solução: Definimos o evento $B = \{\text{sair um par}\}$. Para contar os elementos de B observamos que:

- 1 para o par:
 - devemos escolher um dos 13 valores;
 - escolhido o valor, há $\binom{4}{2}$ formas de escolher as cartas entre os 4 naipes;
- 2 as outras três cartas da mão, que devem ser diferentes entre si, e diferentes do tipo do par, podem ser obtidos de
 - $\binom{12}{3}$ formas;
 - para cada grupo de valores escolhido, temos 4 naipes disponíveis para cada valor.

Portanto,

$$P(B) = \frac{\# \text{ casos favoráveis}}{\# \text{ casos possíveis}} = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\binom{52}{5}}.$$

A figura representa uma casa com 15 quartos. Na casa há duas pessoas (Daryl e Rick) e um zumbi. *Sim, ... um zumbi!* Enquanto Daryl e Rick estão aguardando nos quartos 2 e 3, respectivamente, o zumbi está se transitando pela casa escolhendo sempre algum quarto para “cima” ou para “direita” em cada movimento. Se zumbi está inicialmente no quarto 1, qual é a probabilidade de que o zumbi tome um caminho para chegar ao quarto do Rick passando pelo quarto do Daryl?



Numa festa, 4 convidados pegam drinks servidos em copos idênticos. Em certo momento os 4 vão dançar e os deixam na mesa de centro. O anfitrião, que não sabia que os copos já tinham dono, começa a distribuí-los entre seus 4 convidados. Qual a probabilidade de que ele entregue os drinks de tal maneira que nenhum dos 4 convidados receba o drink que escolheu originalmente?