

## Probabilidade condicional

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael  
Introdução à Probabilidade e Estatística.



1 Introdução

2 Probabilidade condicional

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos da bibliografia.

Na seguinte tabela se mostram as observações de 395 estudantes universitários separando eles segundo dois critérios: se estudou o ensino médio numa escola pública ou privada e se o estudante está trabalhando ou não.

|         | Sim | Não | Total |
|---------|-----|-----|-------|
| Privada | 29  | 59  | 88    |
| Pública | 103 | 204 | 307   |
| Total   | 132 | 263 | 395   |

Selecionamos aleatoriamente um estudante, e vendo sua ficha logo vemos que ele está **entre os que trabalham**. Dada esta informação, qual é a probabilidade de esse estudante ter feito o ensino médio na escola pública?

Se sua resposta é

$$\frac{103}{132} = 0,78$$

você está adivinhando bem. Vejamos de onde vem essa resposta.

- Seja  $A = \{ \text{o estudante fez o ensino médio na escola pública} \}$ ,
- seja  $B = \{ \text{o estudante trabalha} \}$ .

Notem que

$$P(A \cap B) = \frac{103}{395} \text{ e } P(B) = \frac{132}{395}$$

Vejam que

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{103}{132} = 0,78.$$

## Definição 1

Seja  $B$  um evento com probabilidade positiva ( $P(B) > 0$ ). Definimos a **probabilidade condicional** do evento  $A$  dado o evento  $B$  como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

# Exemplo

Suponha que jogamos dois dados equilibrados e observamos o número das faces superiores.

| S | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

A 

Se  $A = \{ \text{soma dos números é 5} \}$  então  $P(A) = 4/36 = 1/9$ .

Suponha agora que sabe que o evento  $B = \{ \text{o menor dos números é o } 2 \}$  ocorreu.

| S | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |                                                                                       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | A  |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) | B  |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |                                                                                       |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |                                                                                       |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |                                                                                       |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |                                                                                       |



A probabilidade de  $A$  muda após a ocorrência de  $B$ ?

Calculemos a probabilidade de  $A$ . Dado a ocorrência de  $B$  a probabilidade de  $A$  é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{9}.$$

*A probabilidade de  $A$  aumentou após a ocorrência de  $B$ . Porque? Poderia ter diminuído essa probabilidade?*

## Exemplo

Um total de 500 casais que trabalham participam de uma pesquisa sobre os seus salários anuais, tendo-se como resultado

| Esposa              | Marido              |                    |
|---------------------|---------------------|--------------------|
|                     | Menos de R\$ 25.000 | Mais de R\$ 25.000 |
| Menos de R\$ 25.000 | 212                 | 198                |
| Mais de R\$ 25.000  | 36                  | 54                 |

Se um dois casais é escolhido aleatoriamente, qual é

❶ a probabilidade de o marido ganhar menos de R\$ 25.000?

Definamos o evento:  $m = \{\text{O marido ganha menos de R\$ 25.000}\}$ . A probabilidade procurada é  $P(m)$ .

$$P(m) = \frac{212 + 36}{500} = 0,496.$$

- 2 a probabilidade condicional da mulher ganhar mais de R\$ 25.000 dado que o marido ganha mais do que essa quantia?

Definamos os eventos:

$$M = \{\text{O marido ganha mais de R\$ 25.000}\}$$

$$E = \{\text{A esposa ganha mais de R\$ 25.000}\}$$

A probabilidade procurada é  $P(E|M)$ .

$$P(M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{198}{198 + 54} = 0,785.$$

*Exercício:* Qual é a probabilidade condicional da mulher ganhar mais de R\$ 25.000 dado que o marido ganha menos do que essa quantia?

Mostre que, se  $P(A|B) = 1$ , então  $P(B^c|A^c) = 1$ .

Começamos analisado a hipótese  $P(A|B) = 1$ . Aplicando a definição de probabilidade condicional, temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

Logo,  $P(A \cap B) = P(B)$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(B^c|A^c) &= \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} \text{ pela definição de prob. Cond.} \\ &= \frac{P((A \cup B)^c)}{P(A^c)} \text{ pela lei de De Morgan} \\ &= \frac{1 - P((A \cup B))}{P(A^c)} \text{ prop. do complementar} \\ &= \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{P(A^c)} \text{ prop. da união} \end{aligned}$$

Mas, temos que  $P(A \cap B) = P(B)$ . Logo

$$\begin{aligned}P(B^c|A^c) &= \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(B))}{P(A^c)} \\&= \frac{1 - (P(A))}{P(A^c)} \\&= \frac{P(A^c)}{P(A^c)} \\&= 1.\end{aligned}$$