

Regra da multiplicação

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael
Universidade federal do ABC



1 Revisão de aula anterior

2 Introdução

3 Regra da multiplicação

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos a bibliografia correspondente.

Proposição

Sejam S um espaço de amostral, $A, A_1, A_2 \subset S$ eventos, e P uma probabilidade em S . Então

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
3. Se $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$;
4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;
5. $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

No nosso último encontro exploramos o conceito de probabilidade condicional. Lembrando, vimos que:

Definição 1

Seja B um evento com probabilidade positiva ($P(B) > 0$). Definimos a **probabilidade condicional** do evento A dado o evento B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Outra forma de escrever a equação acima, é simplesmente dizer que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

E é nesta forma de olhar a condicional que vamos nos concentrar agora...

Considere uma empresa de manufatura que recebe remessas de peças de dois fornecedores diferentes. Atualmente, 65% das peças adquiridas pela empresa são do fornecedor 1 e os 35% restantes são do fornecedor 2.

A qualidade das peças adquiridas varia dependendo do fornecedor. Sabemos que aproximadamente 2% das peças que vem do fornecedor 1 são defeituosas, enquanto 5% das peças do fornecedor 2 apresentam algum tipo de defeito.

Suponha que temos todas as peças já misturadas, prontas para distribuição, e sorteamos uma peça ao acaso. O que podemos dizer sobre a probabilidade da peça ser boa e ser no fornecedor 1?

Entendendo o problema...

Como de costume, vamos começar entendendo o que o problema nos dá...

O espaço amostral é composto de todas as peças armazenadas pela empresa, com duas propriedades apenas diferenciando uma peça da outra: qualidade e fornecedor.

Denotemos agora por A_1 o evento de que uma peça vem do fornecedor 1 e por A_2 o evento de que uma peça vem 2. Neste caso sabemos que

$$P(A_1) = 0,65 \quad \text{e} \quad P(A_2) = 0,35.$$

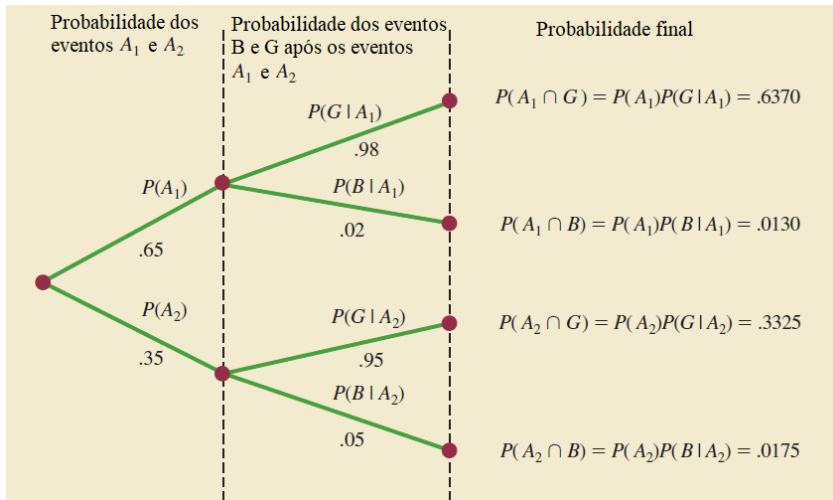
Denotemos por G o evento de que a peça selecionada é boa e por B o evento de que a peça selecionada é ruim. neste caso o problema nos dá que

$$P(G|A_1) = 0,98 \quad \text{e} \quad P(B|A_1) = 0,02$$

$$P(G|A_2) = 0,95 \quad \text{e} \quad P(B|A_2) = 0,05$$

Ele pede então $P(A_1 \cap G)$.

A solução agora é simples, e fica bem ilustrada no diagrama abaixo.



- Os dados passados pelo problema são de dois tipos:
 - ① Dados sobre a proporção de peças que vem dos diferentes fornecedores;
 - ② Dados sobre qualidade **separados por fornecedor**;
- Como só poderemos fazer qualquer afirmativa sobre a qualidade após sabermos o fornecedor, isso nos força a quebrar o experimento em duas etapas:
 - ① Primeiro escolhemos o fornecedor, com probabilidades dadas pela proporção de peças enviadas por cada um;
 - ② A seguir sortearmos uma peça no fornecedor escolhido;
- Queremos agora a probabilidade de que ocorram dois eventos mas eles não acontecem na mesma etapa do experimento!
- Os eventos sobre o produtor da peça são observados “primeiro”, e os eventos sobre qualidade são observados posteriormente.

Exemplo

Uma urna contém 4 bolas azuis e 5 bolas amarelas. Sorteamos uma bola. A seguir, sem devolver a bola sorteada para a urna, sorteamos uma segunda bola. Finalmente, sem devolver as bolas sorteadas, sorteamos uma terceira.

Qual a probabilidade de sortearmos 3 bolas amarelas?

Obs: Este tipo de experimento é também descrito como sorteios sem reposição. Neste caso poderíamos dizer que sorteamos 3 bolas, sem reposição.

Solução: Podemos olhar esse experimento como 3 experimentos em sequência, cada um deles consistindo de um sorteio de uma bola em uma urna.

Considere então os eventos $A_k = \{\text{a } k\text{-ésima bola sorteada é amarela}\}$.

Queremos calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Mas o que sabemos?

O evento A_1 é simples... Quando a primeira bola é sorteada temos 4 azuis e 5 amarelas, de modo que

$$P(A_1) = \frac{5}{9}.$$

Continuando a solução...

Para analisarmos o evento A_2 , precisamos antes de saber o resultado do primeiro sorteio. Isso por que

- 1 Se a primeira bola sorteada é amarela, sobram 4 azuis e 4 amarelas na urna;
- 2 Se a primeira bola sorteada é azul, sobram 3 azuis e 4 amarelas na urna.

Assim, não temos certeza de quem é $P(A_2)$, mas sabemos que

$$P(A_2|A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo, para analisar A_3 precisamos saber o resultado dos dois primeiros sorteios!! Em particular, se as duas primeiras bolas sorteadas são amarelas, restam 4 azuis e 3 amarelas no momento do terceiro sorteio, e portanto

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{7}.$$

Continuando a solução...

Para concluir precisamos perceber duas coisas. Primeiro que

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

o que implica que $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1)$.

Do mesmo modo

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$$

o que implica que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2)$.

E juntando tudo temos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504} = \frac{5}{42}.$$

Generalizando essa ideia encontramos:

Teorema

Se A_i é um evento, para todo $i \in 1, \dots, n$. Então,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Ideia da prova: Por indução!

Observação

Vejam que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ implica que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Suponha que os eventos A_1 e A_2 tem probabilidades $P(A_1) = 0,4$ e $P(A_2) = 0,6$.
Suponha que $P(B|A_1) = 0,2$ e $P(B|A_2) = 0,05$. Calcule $P(A_1 \cap B)$ e $P(A_2 \cap B)$.

Pela regra da multiplicação, temos que

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B|A_1) = 0,4 \times 0,2 = 0,08.$$

e

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2)P(B|A_2) = 0,6 \times 0,05 = 0,03.$$

Um baralho comum de 52 cartas é dividido aleatoriamente em 4 pilhas de 13 cartas cada. Calcule a probabilidade de que cada pilha tenha exatamente um às.

Solução:

Para dividir as cartas em 4 grupos, precisamos definir em que grupo vai cada carta. Uma forma de fazer isso é ordenar as 52 cartas, e considerar cada grupo de 13 cartas consecutivas como um grupo diferente.

Para ordenar as cartas, comecemos então pelos Ases, que são as cartas que estamos interessados.

Suponha que comecemos com o Ás de espadas, seguido do Ás de copas, o de ouros e finalmente o de paus.

Defina então os eventos

$E_1 = \{\text{o ás de espadas e o ás de copas estão em pilhas diferentes}\}$

$E_2 = \{\text{os ases de espadas, copas e ouros estão em pilhas diferentes}\}$

$E_3 = \{\text{todos os 4 ases estão em pilhas diferentes}\}$

A probabilidade desejada é $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$.

Pela regra da multiplicação, $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)$.

Para calcular $P(E_1)$ podemos simplesmente contar. Temos $52!$ permutações possíveis. Para sabermos quantas destas possuem o Ás de espadas e o de copas em grupos diferentes, podemos começar notando que temos 52 posições possíveis para o Ás de espadas, e como o Ás de copas deve ficar em grupo diferente, temos 39 opções de posição para ele. As demais 50 cartas podem ser ordenadas nas 50 posições remanescentes, o que pode ser feito de $50!$ maneiras.

Assim temos $52 \cdot 39 \cdot 50!$ maneiras ordenar as cartas de modo que os Áses de espada e copas fiquem em grupos diferentes, e portanto

$$P(E_1) = \frac{52 \cdot 39 \cdot 50!}{52!} = \frac{39}{51}.$$

Note agora que, dado que os Áses de espadas e copas estão em grupos separados, restam 50 posições disponíveis, das quais apenas 26 podem ser ocupadas pelo Ás de ouros. Deste modo temos

$$P(E_2|E_1) = \frac{26}{50}.$$

Um raciocínio análogo nos dá

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{13}{49}.$$

Logo

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{39 \times 26 \times 13}{51 \times 50 \times 49} \approx 0,105.$$

Exemplo

Considere dois eventos A e B tal que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ e $P(A|B) + P(B|A) = 2/3$. Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c), && \text{porque?} \\ &= 1 - P(A \cap B) && \text{porque?} \end{aligned}$$

Agora precisamos achar $P(A \cap B)$ usando a regra da multiplicação. Como $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ e $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$, substituindo na hipótese temos que:

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

Substituindo os valores de $P(A)$ e $P(B)$ dados no problema, chegamos a

$$5P(A \cap B) + 3P(A \cap B) = \frac{2}{3}.$$

Logo

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}.$$

Antes tínhamos que,

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{12} \\ &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$