

Independência de eventos

Profs. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



1 Introdução

2 Eventos independentes

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos da bibliografia.

Considere um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

$$C = \{\text{carta é de copas}\}$$

$$R = \{\text{carta é um rei}\}$$

$$V = \{\text{carta é vermelha}\}.$$

As probabilidades dos eventos anteriores são:

$$P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad \text{e} \quad P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

Vamos, agora, calcular as seguintes probabilidades condicionais: $P(R|C)$ e $P(V|C)$. No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas. No segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13} = P(R)$$

$$P(V|C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1 \neq P(V).$$

$C \subset V$



Vamos ver o que descobrimos no exercício anterior:

- 1 No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou nenhuma informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber ou não que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei.
- 2 Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos radicalmente a probabilidade de sair carta vermelha. Como vimos, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta tem que ser vermelha.

Esse exemplo ilustra um conceito importante e central na probabilidade: o conceito de independência. No primeiro caso, onde o conhecimento da ocorrência de C não traz qualquer informação para reavaliarmos a probabilidade de R , dizemos que os eventos R e C são independentes.

Já no segundo caso, onde o conhecimento da ocorrência de C faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de V , diremos que os eventos V e C são dependentes.

No exemplo anterior vimos eventos R e C tais que $P(R|C) = P(R)$, e dissemos que R e C são independentes. Uma outra maneira de olhar para o problema, é lembrar da regra da multiplicação, e ver que $P(R|C) = P(R)$ se, e só se,

$$P(R \cap C) = P(R|C)P(C) = P(R)P(C).$$

Segue daí que

$$P(C|R) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{P(R)P(C)}{P(R)} = P(C).$$

Isso nos dá uma maneira melhor de definir independência, que colocamos a seguir.

Definição

Dois eventos A e B são chamados de independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Dois eventos A e B que não são independentes são chamados de dependentes.

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas. Se A é o evento em que a carta selecionada é um Ás e B é o evento em que a carta selecionada é do naipe de espadas, então A e B são independentes.

Isso ocorre porque $P(A \cap B) = 1/52$, enquanto $P(A) = 4/52$ e $P(B) = 13/52$.

Deste modo, vale que

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = P(A)P(B).$$

Exemplo

Sejam A e B dois eventos associados ao mesmo experimento.

Se $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(B) = p$, quanto vale p para que

- 1 A e B sejam independentes?

Se A e B são independentes então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Calculemos estas probabilidades:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\&= \frac{1}{4} + p - \frac{2}{3} \\&= p - \frac{5}{12},\end{aligned}$$

e,

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4}p.$$

Vamos igualar $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e depois isolamos p .

Igualando obtemos que:

$$p - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}p.$$

Isolemos p .

$$p - \frac{1}{4}p = \frac{5}{12},$$

$$\frac{3}{4}p = \frac{5}{12},$$

$$p = \frac{5 \times 4}{12 \times 3},$$

$$p = \frac{5}{9}.$$

2 E para que A e B sejam mutuamente exclusivos?

Se A e B são mutuamente exclusivos então $A \cap B = \emptyset$ o que implica que $P(A \cap B) = 0$.
Então,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

O que nos leva a

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + p$$

Isolando p , obtemos que $p = 5/12$.

Definição

Três eventos A , B e C são ditos independentes se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Como seria a definição para n eventos independentes?

Exemplo

Considere o lançamento de dois dados e os seguintes eventos:

- $A = \{\text{face par no primeiro dado}\};$
- $B = \{\text{face par no segundo dado}\};$
- $C = \{\text{soma par das duas faces}\}.$

Estudemos a independência destes 3 eventos.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(C)$$

$$P(C \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(C)P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

Logo, os eventos não são independentes.

Exemplo

Suponha que o espaço amostral é $S = \{a, b, c\}$. Suponha também que $P(\{a, b\}) = 0,7$, e $P(\{b, c\}) = 0,6$.

- 1 Calcule as probabilidades de $\{a\}$, $\{b\}$, e $\{c\}$.

O conjunto $\{a, b\} = \{c\}^c$, logo, pela propriedade do complemento temos

$$P(\{c\}) = 1 - P(\{c\}^c) = 1 - P(\{a, b\}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Da mesma maneira achamos a $P(\{a\})$.

$$P(\{a\}) = 1 - P(\{a\}^c) = 1 - P(\{b, c\}) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Para achar a $P(\{b\})$ devemos notar que $1 = P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\})$, assim obtemos que

$$P(\{b\}) = 1 - P(\{a\}) - P(\{c\}) = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3.$$

2 São $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ eventos independentes?

Para concluir que $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ são eventos independentes, devemos verificar que

$$P(\{a, b\} \cap \{b, c\}) = P(\{a, b\})P(\{b, c\}).$$

Calculemos cada probabilidade separadamente e comparamos elas.

$$P(\{a, b\} \cap \{b, c\}) = P(\{b\}) = 0,3.$$

Por outro lado,

$$P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0,7 \text{ e } P(\{b, c\}) = P(\{a\}) + P(\{c\}) = 0,7.$$

$$P(\{a, b\})P(\{b, c\}) = 0,7 \times 0,7 = 0,49.$$

Como $0,3 = P(\{a, b\} \cap \{b, c\}) \neq P(\{a, b\})P(\{b, c\}) = 0,49$ os eventos não são independentes.

Exemplo

Mostre que se A , B e C são eventos independentes, então A é independente de $B \cup C$.

Suponha que A , B e C são eventos independentes. Vejamos que A é independente de $B \cup C$. Para isso, devemos mostrar que

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C).$$

Calculemos essas probabilidades.

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) && \text{Lei distributiva de conjuntos} \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Mas, pela independência entre A , B e C , temos que

$$\begin{aligned}P(A \cap (B \cup C)) &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\&= P(A)[P(B) + P(C) - P(B)P(C)] \\&= P(A)[P(B) + P(C) - P(B \cap C)] \\&= P(A)P(B \cup C)\end{aligned}$$

Assim, temos provado que A é independente de $B \cup C$.

Exercício

Se E é um evento independente de F e de G e $F \cap G = \emptyset$, mostre que E é independente de $F \cup G$

Independência como hipótese

Um jogador entra em um cassino e resolve tentar a sorte na roleta. Ele acredita muito na sorte, e preferiu não fazer as contas, mas o cassino sabe que a probabilidade do jogador ganhar cada partida jogada é de 0,4. O jogador pretende jogar 3 partidas, sabendo que em cada vitória ele ganha 100 reais, enquanto em cada derrota ele perde 100 reais. Considerando que ele pode vencer ou perder cada partida de maneira independente dos demais, calcule a probabilidade de que ele ganhe mais de 100 reais neste dia.

Solução: Neste problema vemos a independência de eventos aparecendo como hipótese do exercício. Aqui, se para cada $k = 1, 2, 3$, definimos os eventos

$$A_k = \{\text{o jogador vence o jogo } k\},$$

então o problema nos diz que A_1 , A_2 e A_3 são independentes. Além disso temos

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,4.$$

Como ele ganha 100 reais por jogo vencido e perde 100 reais por jogo perdido, se ele perder todos os jogos, ele perde 300 reais no total. Vencendo apenas 1 dos jogos, ele ganha 100, mas perde 200. Ganhando 2 jogos, ele ganha 200 mas perde 100. E assim, só se ele ganhar os 3 jogos ele terá ganhado mais de 100 reais.

Deste modo, o evento que buscamos é dado por

$$E = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Pela independência

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064.$$

Assim o jogador tem uma probabilidade de apenas 6,4% de ganhar mais de 100 reais neste dia de jogos!

Suponha que, em pleno vôo, o motor de um avião tem probabilidade 0,25 de falhar, independentemente de motor a motor. Além disto, suponha que um avião precisa a maior parte de seus motores funcionando para completar um vôo bem sucedido. Considere um avião de 3 motores.

- 1 Qual é a probabilidade de que o avião tenha um vôo bem sucedido?
- 2 Dado que o avião teve um vôo bem sucedido, qual é a probabilidade de que pelo menos um de seus motores tivesse falhado?