

Combinatória (parte 1)

Princípios Básicos de Contagem

Introdução à Probabilidade e Estatística

Professores: Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Universidade Federal do ABC

- 1 Introdução
- 2 O que é contar?
- 3 Princípios básicos de contagem
 - Princípio aditivo
 - Princípio multiplicativo
- 4 Princípio de inclusão e exclusão
- 5 Referências bibliográficas

Embora a nossa intuição possa falar o contrário, “contar” os objetos de um certo conjunto pode não ser tarefa fácil! E ao longo da vida vamos nos deparar com situações de contagem que requerem muita atenção e organização, mesmo para problemas “simples”.

A Análise Combinatória (ou simplesmente combinatória) trata, dentre outros temas, destes modos de organizar processos de contagem, de modo a simplificá-los. Para isso a Análise Combinatória oferece diversas ferramentas, quase todas baseadas em alguns princípios simples.

Neste curso vamos nos concentrar nas ferramentas mais básicas (que são também as mais importantes) e que vão nos permitir sentir, um pouco mais para frente, o gosto de um dos conceitos mais importantes que estudaremos nesta disciplina: o de Probabilidade.

As ferramentas e problemas estudados pela combinatória vão muito além da simples contagem, sendo justamente a área da matemática responsável pelo estudo de *estruturas discretas*, como redes e mapas.

Para os curiosos em aprender mais sobre combinatória ou sobre conjuntos em geral (como estudar conjuntos com infinitos elementos?) aconselhamos bisbilhotar as disciplinas oferecidas nos Bacharelados em Ciência da Computação e em Matemática (o melhor de todos!).

O que é contar?

O processo de contagem talvez seja o primeiro contato que temos com números e a matemática. A partir de brincadeiras e jogos aprendemos cedo como associar números inteiros à conjuntos de objetos. Quando algum adulto levanta a mão aberta e pergunta “quantos dedos tem aqui?”, prontamente respondemos “cinco” !!

Mas como se dá esse processo? Quando diante de uma caixa de brinquedos, por exemplo, como fazemos para determinar quantos brinquedos temos ali?

Em geral começamos a separar os brinquedos, um a um, dizendo em sequência os números 1, 2, 3, 4, etc, um para cada brinquedo, até a caixa estar vazia. O total de brinquedos será então o último número que falamos!

O que é contar?

Em outras palavras, se o conjunto contém n objetos, associamos a cada objeto um, e apenas um, número do conjunto $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Matematicamente, contar os elementos de um conjunto X é estabelecer uma correspondência biunívoca (bijetora) entre os elementos de X e os elementos de um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$.

Ou seja, é fazer corresponder a cada elemento de X um único elemento de I_n , sem que dois elementos de X sejam associados à um mesmo número em I_n , e sem que reste nenhum elemento em X ou em I_n .

Quando isto é possível dizemos que X é finito e tem n elementos.

O que é contar?

Mas apenas enumerar elementos de um conjunto pode ser um processo tedioso e, na prática, impossível.

Quando queremos descobrir o total de pratos que temos em casa podemos, em geral, simplesmente enumerá-los e assim descobrir. Mas se precisarmos calcular o total de maneiras que podemos organizar 1200 alunos em turmas de 45 alunos cada, listar cada possibilidade para posteriormente contar é um trabalho ingrato que toma mais tempo do que podemos dedicar a ele.

Por essa razão é importante conhecer ao menos algumas técnicas básicas que nos ajudem a atacar tais problemas.

As técnicas que abordaremos aqui são todas baseadas em dois princípios básicos e simples. Mas antes de enunciá-los apresentaremos dois problemas que os ilustram.

Exemplo 1: No próximo sábado teremos às 20h lives de Marília Mendonça, Vintage Culture e Caetano Veloso. No mesmo horário teremos entrevistas de Drauzio Varella e Paola Carosella. De quantas formas poderemos nos programar?

Princípios básicos de contagem

Primeiro observe que temos disponíveis 3 lives (Marília Mendonça, Vintage Culture ou Caetano Veloso) e 2 entrevistas (Drauzio Varella ou Paola Carosella).

Como todas as transmissões são no mesmo horário só podemos assistir à uma das 3 lives **ou** uma das 2 entrevistas.

Assim, ao todo, poderemos nos programar de $2 + 3 = 5$ formas.

Exemplo 2: No próximo sábado teremos às 18h entrevistas de Drauzio Varella e Paola Carosella no Youtube e às 20h lives de Marília Mendonça, Vintage Culture e Caetano Veloso no Instagram. De quantas formas poderemos nos programar para assistir uma entrevista e uma live?

Princípio básicos de contagem

Com esta nova grade de horários é possível que assistamos uma entrevista e uma live. Assim, para nos programar devemos primeiro escolher uma entrevista, e depois uma live, como ilustrado na tabela abaixo.

	Entrevista	Live
1	Drauzio Varela	Marília Mendonça
2	Drauzio Varela	Vintage Culture
3	Drauzio Varela	Caetano Veloso
4	Paola Carosella	Marília Mendonça
5	Paola Carosella	Vintage Culture
6	Paola Carosella	Caetano Veloso

Note que para cada uma das 2 opções de entrevista temos 3 opções de live, e portanto poderemos nos programar de $2 \cdot 3 = 6$ maneiras distintas!

Princípio aditivo

O primeiro exemplo ilustra o chamado **princípio aditivo**, que podemos enunciar da seguinte maneira.

Princípio Aditivo

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Observação: Lembre que dois conjuntos A e B são disjuntos se não tem elementos em comum, isto é se $A \cap B = \emptyset$.

Princípio aditivo

DV	Drauzio Varella
PC	Paola Carosella
MM	Marília Mendonça
VC	Vintage Culture
CV	Caetano Veloso

Voltando ao exemplo **Exemplo 1**, vemos que é possível identificar dois conjuntos

- $A = \{x | x \text{ é uma entrevista}\} = \{DV, PC\}.$
- $B = \{x | x \text{ é uma live}\} = \{MM, VC, CV\}.$

De onde

$$A \cup B = \{x | x \text{ é uma entrevista } \mathbf{ou} x \text{ é uma live}\}.$$

Uma vez que os conjuntos A e B não possuem elementos em comum, usando o princípio aditivo podemos afirmar que $A \cup B$ tem 5 elementos.

Princípio multiplicativo

Já o segundo exemplo ilustra o chamado **princípio multiplicativo**, que pode ser enunciado da seguinte maneira.

Princípio Multiplicativo

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o total de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 em sequência é $x \cdot y$.

Observação: Na linguagem da teoria dos conjuntos, se o conjunto D_1 tem x elementos e o conjunto D_2 tem y elementos então $D_1 \times D_2$ (lê-se D_1 cartesiano D_2), dos pares ordenados (a, b) em que $a \in D_1$ e $b \in D_2$, tem xy elementos.

Princípio multiplicativo

DV	Drauzio Varella
PC	Paola Carosella
MM	Marília Mendonça
VC	Vintage Culture
CV	Caetano Veloso

Voltemos então ao **Exemplo 2**, onde temos duas decisões a tomar:

- $d_1 :=$ assistir a entrevista DV ou PC.
- $d_2 :=$ assistir a live MM, VC ou CV.

A decisão d_1 pode ser tomada de 2 formas, e feita a escolha a decisão d_2 pode ser tomada de 3 formas. Com isso, usando o princípio multiplicativo, a sequência de decisões d_1 e d_2 podem ser tomadas de $2 \times 3 = 6$ maneiras distintas.

Princípios básicos de contagem

Exemplo 3: Temos dois dados ℓ_1 e ℓ_2 . Lançamos ℓ_1 e anotamos o resultado, depois lançamos ℓ_2 e anotamos o resultado.

- 1 Quantos pares de números podemos obter desta forma?
 - D_i : resultado de lançar ℓ_i (isto é 1, 2, 3, 4, 5 ou 6), para $i = 1, 2$.

Como D_1 e D_2 podem ter 6 resultados diferentes então a quantidade de pares possíveis é $6 \times 6 = 36$.

- 2 Quantos os pares de números diferentes?
 - D_1 : resultados ao lançar ℓ_1
 - D_2 : resultados do lançamento de ℓ_2 , distintos do resultado em D_1

Observe que D_1 possui 6 resultados possíveis, e fixada o valor para D_1 temos 5 resultados possíveis para D_2 . Com isso, pelo princípio multiplicativo, temos $6 \cdot 5 = 30$ resultados possíveis.

Observação: É interessante observar que as decisões possíveis no segundo passo são distintas para cada valor escolhido em D_1 .

Se, por exemplo, o resultado do primeiro dado for 1, as escolhas possíveis para o segundo dado são 2, 3, 4, 5 ou 6, mas se a escolha para o primeiro dado for 4, os valores possíveis são 1, 2, 3, 5 ou 6. Mas como o total de possibilidades para a decisão D_2 é sempre 5, independente de que escolha tenhamos feito em D_1 , o princípio multiplicativo ainda se aplica.

Exercício: Ainda no exemplo anterior, quantos são os pares onde um resultado é par e o outro ímpar?

Tente resolver!

- D_1 :
- D_2 :

Princípios básicos de contagem

O princípio multiplicativo pode-se escrever de forma mais geral como segue:

Se r experimentos são tais que o primeiro tem n_1 resultados possíveis; e se, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento; e se ..., então haverá um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Princípios básicos de contagem

Observe que na formulação da generalização do Princípio Multiplicativo usamos as expressões experimento e número de resultados possíveis, enquanto na formulação do Princípio Multiplicativo usamos as expressões decisão e número de maneiras de tomar a decisão. Isto é um problema?

Escreva o princípio Multiplicativo usando as expressões **experimento** e **número de resultados possíveis**.

Princípios básicos de contagem

Exemplo 4: Quantos divisores naturais possui o número 360? Quantos deles são pares?

A fatoração de 360 como produto de potências de números primos é $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Em geral, os divisores de 360 são da forma

$$2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3},$$

onde $\alpha_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha_2 \in \{0, 1, 2\}$ e $\alpha_3 \in \{0, 1\}$. Assim, teremos 3 desições a tomar

d_i : valor de α_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$.

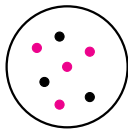
Pelo princípio multiplicativo 360 tem $4 \times 3 \times 2 = 24$ divisores naturais. É comum escrever toda esta informação em tabelas como a seguinte

$$\begin{array}{c|c|c} d_1 & d_2 & d_3 \\ \hline 4 & 3 & 2 \end{array}.$$

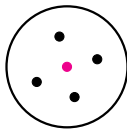
Para a segunda questão é só observar que para que um divisor 360 seja par o valor de α_1 não pode ser 0. Assim o total é de $3 \times 3 \times 2 = 18$ divisores pares.

Princípios básicos de contagem

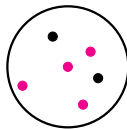
Exemplo 5: Considere as seguintes urnas contendo bolas rosas e pretas, numeradas:



Urna 1



Urna 2



Urna 3

Escolha ao acaso uma bola de cada uma das urnas.

- ❶ Quantos são todos os possíveis resultados deste experimento?

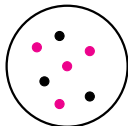
Urna 1	Urna 2	Urna 3

- ❷ Quantos são os resultado em que todas as três bolas são rosas?

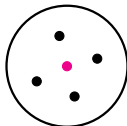
Urna 1	Urna 2	Urna 3

Princípios básicos de contagem

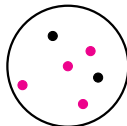
Continuação do exemplo 5: Considere as seguintes urnas contendo bolas rosas e pretas, numeradas:



Urna 1



Urna 2



Urna 3

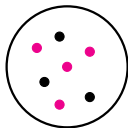
Escolha ao acaso uma bola de cada uma das urnas.

3. Quantos são os resultados nos quais a bola da urna 1 é preta e a bola da urna 3 é preta?

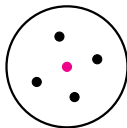
Urna 1	Urna 2	Urna 3

Princípios básicos de contagem

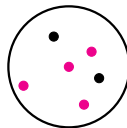
Continuação do exemplo 5: Considere as seguintes urnas contendo bolas rosas e pretas, numeradas:



Urn 1



Urn 2



Urn 3

4. Escolha ao acaso uma das urnas. Da urna escolhida, retire ao acaso uma bola observando sua cor. Quantos são os resultados possíveis deste experimento? Quantos são os resultados onde a bola escolhida é rosa?

Princípios básicos de contagem

Exemplo 6: Quantos números naturais de 4 algarismos, que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

Temos as seguintes opções para cada algarismo:

- Último algarismo $\rightarrow$ 1 modo (tem que ser 5);
- Primeiro algarismo $\rightarrow$ 3 modos (não pode ser 5);
- Segundo algarismo $\rightarrow$ 4 modos;
- Terceiro algarismo; $\rightarrow$ 4 modos.

Desta forma existem $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$ números com as características requeridas.

Princípios básicos de contagem

Exemplo 7: Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Nesta situação temos:

- Último algarismo $\rightarrow$ 5 modos (0, 2, 4, 6 ou 8);
-

Primeiro algarismo $\rightarrow \begin{cases} 9 \text{ modos,} & \text{se zero esta na última casa;} \\ 8 \text{ modos,} & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Note que não podemos usar o princípio multiplicativo diretamente! Isso por que o total de escolhas para o primeiro algarismo depende de que escolha fizemos para o último!

Para resolver este problema veremos a seguir três opções.

Princípios básicos de contagem

Continuação exemplo 7: Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 1: Dividir o problema em casos.

A_i : i -ésimo

algarismo.

- Números que têm zero como último algarismo:
neste caso teremos $9 \times 8 \times 1 = 72$ números. Explique!

A_1	A_2	A_3
9	8	1

- Números que não têm zero como último algarismo:
a quantidade destes números é $8 \times 8 \times 4 = 256$. Porque?

A_1	A_2	A_3
8	8	4

Assim temos em total $72 + 256 = 328$ números (porque podemos usar aqui o Princípio Aditivo?).

Princípios básicos de contagem

Continuação exemplo 7: Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 2: Ignorar uma das restrições.

Se esquecermos o fato de que de zero não pode ser o primeiro algarismo teríamos $9 \times 8 \times 5 = 360$ números. Explique!

$$\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 9 & 8 & 5 \end{array}$$

Desta quantidade teremos que descontar os números que começam por zero. Fixando o 0 (zero) no primeiro algarismo, sobram 4 opções para o último (2,4,6 ou 8), e em seguida apenas 8 para o algarismo do meio. Isso nos dá $1 \times 8 \times 4 = 32$.

$$\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 1 & 8 & 4 \end{array}$$

Assim temos um total de $360 - 32 = 328$ números.

Princípios básicos de contagem

Continuação exemplo 7: Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 3: Resolver o problema complementar.

- Calculamos todos os números de três algarismos diferentes que são ímpares (isto é bem mais simples de encontrar!).

Esta quantidade é $___ \times ___ \times ___ = ___$.

A_1	A_2	A_3

- Os números de três algarismos diferentes são $___ \times ___ \times ___ = ___$.

A_1	A_2	A_3

Assim em total temos $___ - ___ = 328$ números.

Princípio de inclusão e exclusão

O princípio aditivo fala sobre a quantidade de elementos da união de conjuntos que não tem elementos em comum, mas o que acontece quando a interseção for não vazia? Vamos ilustrar isto com o seguinte exemplo.

Princípio de inclusão e exclusão

Exemplo 8: Numa aula de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam espanhol e 3 falam inglês e espanhol. Quantos alunos falam apenas uma língua, dentre inglês e espanhol?

Se definirmos os conjuntos

$$E = \{x : x \text{ fala espanhol}\} \text{ e } I = \{x : x \text{ fala inglês}\}$$

a resposta seria o número de elementos de $E \cup I$.

Se somarmos o número de elementos de E e I , teremos contado duas vezes os elementos que estão na interseção, isto é, aqueles alunos que falam inglês e espanhol. Logo a resposta correta é

$$|E| + |I| - |E \cap I| = 14 + 5 - 3.$$

(Obs: A partir daqui denotaremos por $|A|$ o total de elementos de um conjunto A)

Princípio de Inclusão e Exclusão

Sejam A e B dois conjuntos finitos. Então o número de elementos de $A \cup B$ é dado por

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Este princípio pode se generalizar para um número finito de conjuntos como veremos a seguir.

Princípio de inclusão e exclusão

Considere o caso em que temos 3 conjuntos A_1 , A_2 e A_3 . Neste caso podemos dizer que temos 3 tipos de elementos:

- Aqueles que estão em apenas 1 dos 3 conjuntos;
- Aqueles que estão em 2 dos 3 conjuntos;
- Aqueles que estão nos 3 conjuntos.

Quando somamos $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, estamos contando alguns elementos em excesso. Especificamente

- Aqueles que estão em 2 dos 3 conjuntos serão contados 2 vezes;
- Aqueles que estão nos 3 conjuntos serão contados 3 vezes.

Princípio de inclusão e exclusão

Para corrigir o primeiro erro podemos simplesmente descontar o total de elementos que está em 2 conjuntos. Assim teríamos

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

Mas os elementos que estão nos 3 conjuntos foram descontados 3 vezes nesta subtração!! Como eles tinham sido contados 3 vezes da primeira vez, ao final contamos cada um deles um total de $3 - 3 = 0$ vezes!

Princípio de inclusão e exclusão

Para corrigir esse erro, basta contarmos mais uma vez os elementos que estão nos três conjuntos!

Com isso encontramos que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| +$$

Princípio de inclusão e exclusão

De modo geral, dados conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ finitos. Se denotarmos

- $S_1 := \sum_{i=1}^n |A_i|,$
- $S_2 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|,$
- $S_3 := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|,$
- $\vdots$
- $S_n := |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Princípio de inclusão e exclusão

Exemplo 9: Numa aula de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam espanhol e 7 falam japonês. Sabendo-se que 3 falam inglês e espanhol, 2 falam inglês e japonês, 2 falam espanhol e japonês e 1 fala as 3 línguas. Quantos alunos falam pelo menos uma destas 3 línguas ?

Se definirmos os conjuntos

$E = \{x/x \text{ fala espanhol}\}$, $I = \{x/x \text{ fala inglês}\}$ e $J = \{x/x \text{ fala japonês}\}$

a resposta é o número de elementos de $E \cup I \cup J$. Usando o princípio de inclusão e exclusão temos que

$$\begin{aligned} |E \cup I \cup J| &= |E| + |I| + |J| - (|E \cap I| + |E \cap J| + |J \cap I|) + |E \cap I \cap J| \\ &= 14 + 5 + 7 - (3 + 2 + 2) + 1, \\ &= 20. \end{aligned}$$

Princípio de inclusão e exclusão

Exemplo 10: Numa festa três convidados entram e pegam drinks servidos em copos idênticos. Em certo momento os três vão dançar e deixam seus copos na mesa de centro. Mais tarde, o anfitrião, que não sabia que os copos já tinham dono, começa redistribuí-los entre seus três convidados. De quantas formas é possível que ele entregue os drinks de tal forma que nenhum dos três convidados receba o seu?

Solução: Seja A o conjunto de todas as possíveis formas de distribuir os copos, e para $i = 1, 2, 3$, defina A_i como o conjunto das distribuições onde o convidado i recebeu o próprio drink.

Nestas condições o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ contém as distribuições onde ao menos um convidado pegou o próprio drink, e portanto a quantidade que estamos procurando é

$$|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Princípio de inclusão e exclusão

Continuação do exemplo 10. Para calcular $|A|$ observamos que para entregar o primeiro copo existem três opções depois, para entregar o segundo duas opções e, finalmente, para entregar o terceiro só uma opção. Assim, $|A| = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Faça agora

- c_i : convidado i e d_i : drink do convidado c_i .

Para calcular $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ usamos o princípio de inclusão exclusão, e para tal teremos que calcular todas as quantidades $|A_i|$, $|A_i \cap A_j|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

O cálculo de $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ é simples, uma vez que só existe uma distribuição onde cada convidado recebe o próprio drink. Ou seja, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

Princípio de inclusão e exclusão

Continuação do exemplo 10.

Para calcular $|A_i|$, observe que se c_i tem o drink d_i , para entregar os outros dois copos temos duas opções. Assim, $|A_i| = 2$.

$|A_i \cap A_j|$ é também simples, uma vez que se os convidados i e j estão com o próprio drink, o terceiro convidado também estará! Isso nos dá $|A_i \cap A_j| = 1$.

Juntando tudo temos

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + \\ &= 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 \\ &= 4.\end{aligned}$$

E portanto

$$|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 6 - 4 = 2.$$

Referências bibliográficas

-  MORGADO, A., PITOMBEIRA, J., PINTO, P., FERNANDEZ P. Introdução à probabilidade e estatística. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.
-  SANTOS, J., MELLO, M., MURANI, I. Introdução à análise combinatória. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna, 2007.
-  LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
-  ROSEN, K. H. Matemática discreta e suas aplicações. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.