

Combinatória (parte 2)

Permutações

Introdução à Probabilidade e Estatística

Professores: Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Universidade Federal do ABC

Conteúdo

- 1 Objetivos
- 2 Motivação
- 3 Permutações
- 4 Referências Bibliográficas

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

Objetivos

Uma vez que já estudamos os Princípios Básicos de contagem vamos agora usá-los para estudar um tipo particular, mas muito frequente, de problemas de contagem: as permutações.

Mesmo que a expressão “permutar” não lhe seja familiar, é algo que fazemos rotineiramente. No fundo, “permutar” é apenas outra palavra para reordenar um conjunto.

Nestes slides vamos:

- Apresentar exemplos simples onde aparecem permutações.
- Dar a definição formal.
- Contar o número de permutações de um conjunto finito.
- Fazer alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1: Quantos são os *anagramas* da palavra ALÔ?

Obs: Um anagrama é apenas um reordenamento das letras de uma palavra (não interessando se a nova ordem é ou não uma palavra da língua portuguesa).

Solução: As possíveis ordenações são

ALO, LOA, OAL, AOL, OLA, LAO.

Assim os elementos de P tem 6 formas possíveis de se ordenar.

Mas, enquanto simplesmente enumerar e contar os diversos anagramas é fácil para uma palavra com 3 letras, o mesmo processo para palavras muito maiores seria muito desgastante.

Continuação do Exemplo 1: Tentemos então algo diferente, na esperança de localizar um padrão que possamos aplicar para palavras maiores.

Em lugar de fazer a lista podemos pensar da seguinte forma:

- para escolher a primeira letra temos 3 opções;
- uma vez escolhida a primeira, para a segunda temos 2 opções;
- uma vez escolhidas as duas primeiras, temos uma única escolha para a terceira.

Concluimos usando o princípio multiplicativo que temos um total de

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

anagramas diferentes da palavra ALÔ.

Motivação

Exemplo 2: No calor do Mundial Feminino de Futebol em 2019 muitos fãs vestiram as camisas do time brasileiro. O apelido de uma das jogadoras mais experientes era FORMIGA. Suponha que um fã mais ousado decide tatuar o apelido da jogadora. De quantas formas um tatuador pode errar ao escrever este apelido? (estamos assumindo que o tatuador vai errar na ordem das letras)

Solução: Queremos aqui apenas contar os anagramas da palavra FORMIGA, que possui 7 letras distintas.

Como estamos tentando localizar um padrão, vamos repetir o mesmo argumento usado no exercício anterior!

Motivação

Continuação do Exemplo 2: Pensando como no exemplo anterior temos

- para escolher a primeira letra temos 7 opções;
- uma vez escolhida a primeira, para a segunda temos 6 opções;
- $\vdots$
- uma vez escolhidas as seis primeiras, temos uma única escolha para a última.

Assim, pelo princípio multiplicativos, existem

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

maneiras de escrever o nome de forma perfeita ou de errar a escrita do nome. Assim, há 5039 maneiras do tatuador errar a tatuagem!

Vamos pensar de novo no problema dos drinks (Exemplo 10 da parte 1 de combinatória). Que tal se em lugar de que 3 convidados pegarem o mesmo drink sejam 7 deles os que fazem isto?

Exemplo 3: Numa festa, sete convidados pegam drinks servidos em copos idênticos. Em certo momento os sete vão dançar e os deixam na mesa de centro. Depois o anfitrião, que não sabia que os copos já tinham dono, começa a distribuí-los entre seus sete convidados. De quantas formas é possível que ele entregue os drinks?

Continuação do exemplo 3:

Solução: Para encontrar a quantidade que buscamos, note que

Para entregar o 1º drink existem 7 opções. Depois, para entregar o 2º drink, ele terá 6 opções. Depois, para entregar o 3º drink, são 5 opções. Seguindo deste modo, finalmente, para o 7º drink haveria uma opção.

Assim teríamos $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneiras distintas de distribuir os drinks.

A resposta é a mesma do exemplo anterior, mas qual a relação entre os dois? Como este problema se relaciona com o anterior?

Continuação do exemplo 3: Para ver essa relação, comece enumerando os convidados. Assim teríamos os convidados em uma fila, como

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7.$$

Agora, se denotarmos por d_i o drink do convidado i , para entregá-los aos convidados tudo o que precisamos fazer é reordenar os drinks $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$ e entregá-los na ordem que escolhermos!

Por exemplo, se ordenarmos os drinks como $d_2, d_4, d_6, d_1, d_3, d_5, d_7$ estaríamos fazendo a seguinte distribuição:

$$d_2 \rightarrow c_1, d_4 \rightarrow c_2, d_6 \rightarrow c_3, d_1 \rightarrow c_4, d_3 \rightarrow c_5, d_5 \rightarrow c_6, d_7 \rightarrow c_7.$$

E deste modo vemos que os dois exemplos tratam do mesmo problema: reordenar uma fila de objetos!!

Desafio

Ainda no exemplo 3: Considere agora que queremos contar todas as maneiras de distribuir os 6 drinks onde nenhum convidado receba o seu próprio drink.

Para isso (veja os slides de Princípios de Contagem), se para $i = 1, \dots, 7$, definirmos os eventos

$$A_i = \{\text{o } i\text{-ésimo convidado recebe o próprio drink}\},$$

temos

$$A_1 \cup \dots \cup A_7 = \{\text{algum convidado recebe o próprio drink}\},$$

e o que queremos contar é

$$|A| - |A_1 \cup \dots \cup A_7|. \quad (\text{Você consegue ver porque?})$$

Como vocês podem suspeitar, para calcular $|A_1 \cup \dots \cup A_7|$ podemos usar o princípio de inclusão e exclusão! Tente completar esse exercício!

Permutações

Acho que agora estamos prontos para generalizar as ideias vistas até aqui...

Queremos calcular então o total de permutações dos elementos de um conjunto de n elementos.

Como uma permutação é apenas uma ordenação dos elementos de um conjunto, se temos um conjunto $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, o que temos que fazer é associar algum b_i ao número 1 (escolher o primeiro elemento da fila), depois associar outro elemento b_j ao número 2 (escolhendo o segundo elemento), e assim por diante, até completarmos a fila.

Assim uma permutação de $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ é uma forma de preencher uma tabela com n casas vazias usando os elementos de B

1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	n
		...			

Observemos que:

- Para por o 1º objeto temos n opções (tantas quantas casas tem na tabela).
- Uma vez colocado o 1º, para por o 2º temos $(n - 1)$ opções (tantas como casas livres na tabela).
- Continuando desta forma, para colocar o $(n - 1)$ -ésimo objeto teremos 2 formas possíveis (neste ponto $(n - 2)$ casas estarão ocupadas).
- O último objeto só terá um lugar disponível.

Pelo princípio multiplicativo, o número de arranjos possíveis usando os elementos de B é

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Notação: Denotamos por $n!$ o número

$$\begin{aligned}n! &:= n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1, \quad n \geq 1 \\ 0! &:= 1,\end{aligned}$$

e lemos n *fatorial*.

Usando a nova notação e os argumentos no slide anterior podemos dizer que:

A quantidade de permutações de um conjunto com n elementos é $n!$.

Permutações - Exemplo

Voltemos ao **Exemplo 3**! Lá queremos distribuir os drinks de volta aos convidados que os deixaram na mesa. Para isso definimos

$$A_i = \{\text{o convidado } i \text{ (} c_i \text{) recebe o próprio drink (} d_i \text{)}\}.$$

Se quisermos calcular $|A_3|$, como podemos pensar isto como uma permutação?

Os elementos de A_3 são as distribuições de drinks onde c_3 recebe d_3 . Isto é são as permutações que deixam fixo d_3 , portanto teremos que reorganizar o conjunto dos outros 5 drinks. Assim, $|A_3| = 5!$

Em geral, quantos elementos tem A_i ?

De forma análoga, $A_2 \cap A_3 \cap A_6$, por exemplo, é o conjunto de distribuições que deixam fixos d_2, d_3 e d_6 . Quantos elementos tem esse conjunto?

Permutações

Exemplo 4 : De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

Vamos acomodar primeiro os rapazes:

O 1º rapaz tem 10 lugares disponíveis. Depois, o 2º tem 8 lugares. Para o 3º ficam 6 lugares. Para o 4º ficam 4. Finalmente, o último rapaz pode escolher entre 2 lugares. Logo podem se acomodar de $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2$ formas (veja a tabela ao lado).

Uma vez acomodados os rapazes restam 5 lugares para as 5 moças. Portanto, elas podem se sentar de $5!$ formas.

Assim, a turma pode se organizar de $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5!$ maneiras.

	<i>R</i>	<i>M</i>
b_1	10	
b_2	8	
b_3	6	
b_4	4	
b_5	2	

Exemplo 5 : De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Começemos identificando as 8 pessoas com os elementos do conjunto

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

Podemos colocar as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que o 1º grupo seja formado pelas 4 primeiras e o 2º pelas 4 últimas. Como há 8! modos de coloca-las desta forma a resposta parecer ser 8!.

Mas cuidado! Se consideramos a divisão $a b c d | e f g h$. Ela é idêntica à divisão $e f g h | a b c d$. Mas na nossa contagem de 8!, essas divisões foram contadas como se fossem distintas.

Temos que levar em conta mais detalhes...

Continuação do exemplo 5 :

Divisões como

$$a b c d | e f g h \quad \text{e} \quad c a d b | e f g h,$$

que diferem apenas pela ordem dos elementos em cada grupo, identificam os mesmos grupos, e portanto são iguais. Assim, como contamos como se fossem distintas, cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes:

- . 2 por causa da ordem dos grupos,
- . $4!$ por causa da ordem dos elementos do 1º grupo,
- . $4!$ por causa da ordem do 2º grupo.

Se contarmos $8!$ divisões e cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes o número de divisões é

$$\frac{8!}{2 \times 4! \times 4!} = 35.$$

Exercício: Quantos anagramas tem a palavra "TARTARA"?

Se as letras fossem diferentes, obteríamos $7!$ anagramas.

Mas ...

- Como os A são iguais, contamos cada anagrama ____ vezes.
- Como os R são iguais, contamos cada anagrama ____ vezes.
- Como os T são iguais, contamos cada anagrama ____ vezes.

Logo a quantidade de anagramas que podemos obter é ____.

Referências Bibliográficas



MORGADO, A., PITOMBEIRA, J., PINTO, P., FERNANDEZ P. Introdução à probabilidade e estatística. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.



SANTOS, J., MELLO, M., MURANI, I. Introdução à análise combinatória. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna, 2007.



LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.



ROSEN, K. H. Matemática discreta e suas aplicações. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.