

Combinatória (parte 3)

Combinações

Introdução à Probabilidade e Estatística

Professores: Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Universidade Federal do ABC

Conteúdo

- 1 Objetivos
- 2 Motivação
- 3 Combinações
- 4 exemplos
- 5 Referências Bibliográficas

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

Objetivos

Voltamos de novo a os Princípios Básicos de Contagem que vamos usar agora para contar o número de subconjuntos com uma quantidade fixa de elementos de um conjunto finito. Neste processo de contagem no qual aparecem os coeficientes binomiais.

Um dos detalhes mais importantes que vamos observar é que, a diferença de quando contamos permutações, quando contamos subconjuntos a ordem dos elementos não é relevante.

Mais especificamente pretendemos aqui:

- Contar o número de subconjuntos, de uma quantidade fixa de elementos, de um conjunto finito.
- Aprender a definição de coeficiente binomial.
- Fazer alguns exemplos de aplicação.

Estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos, ordenados ou não, que podem ser formados a partir de um total de n objetos. Para isso vamos estudar dois problemas similares:

- 1 De quantas formas podemos selecionar r elementos em um conjunto com n elementos, e arruma-los em uma fila?
- 2 De quantas formas podemos selecionar r elementos em um conjunto com n elementos?

Exemplo 1: De quantas formas podemos selecionar 3 elementos do conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ e organiza-los em uma fila?

Solução: Esse é um problema típico de princípio multiplicativo, e para resolvê-lo basta observar que:

- há 5 maneiras de selecionar o primeiro elemento da fila;
- há 4 maneiras de selecionar o elemento seguinte,
- há 3 maneiras de selecionar o elemento final.

E portanto, existem $5 \times 4 \times 3$ maneiras de formar a fila desejada.

Primeiros Exemplos

Exemplo 2: De quantas formas podemos selecionar 3 elementos do conjunto $\{A, B, C, D, E\}$?

Solução: Este problema é similar ao anterior, no sentido que ainda precisamos selecionar 3 elementos, com a diferença de que agora não precisamos organizá-los em um fila.

Mas como isso altera nossa solução?

Já sabemos existem $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras de formar a fila desejada. Ou seja, 60 maneiras de selecionar o grupo de 3 diferenciando-os pela ordem dos elementos.

Enquanto no exemplo anterior a fila ABC é distinta da fila CBA são distintas, no problema atual os conjuntos $\{A, B, C\}$ e $\{C, B, A\}$ são de fato idênticos, e devemos levar em conta isto no momento de fazer a nossa contagem.

Continuação do exemplo 2:

Note então que nas 60 filas encontradas, cada grupo de 3 letras será contado $6 = 3!$ vezes. Por exemplo, todas as permutações do subconjunto $\{A, B, C\}$ estão sendo contadas, formando o grupo

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

Agora, como cada grupo de 6 elementos deve ser contado como apenas 1 vez, o total de grupos **não ordenados** é

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10.$$

Antes de continuar, queremos reescrever os resultados anteriores usando fatoriais.

- **Exemplo 1:** Aqui podemos reescrever a resposta como:

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}.$$

- **Exemplo 2:** Aqui podemos reescrever a resposta como:

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!}.$$

Generalizando

Em geral, quando queremos formar filas de r elementos selecionados dentre n elementos disponíveis, com $r \leq n$, temos um total de

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - r + 1)$$

formas de fazê-lo. É importante notar que na solução acima estamos multiplicando um total de r termos, um para cada posição da fila, como esperado.

Reescrevendo como no slide anterior obtemos

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!},$$

formas de selecionar **grupos ordenados** de r elementos, dentre n disponíveis.

Se quisermos agora simplesmente selecionar r elementos dentre n disponíveis ($r \leq n$) de modo que **a ordem da seleção não seja relevante**, basta agruparmos as filas do exemplo anterior em grupos formados pelas $r!$ permutações de um mesmo subconjunto de r elementos. Assim, o número de grupos diferentes de r itens que podem ser formados a partir de um conjunto de n itens é

$$\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Coeficientes Binomiais

Notação. A expressão encontrada no slide anterior, que conta o total de subconjuntos de r elementos de conjunto com n elementos, recebe o nome especial de **coeficiente binomial**, e é denotado por

$$\binom{n}{r} \quad \text{ou por} \quad C_{n,r}, \quad \text{com} \quad r \leq n.$$

Ou seja,

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Observemos que, como $0! = 1$, temos que

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Exemplos Finais

Exemplo 3: De um grupo de 5 engenheiros e 7 economistas, quantos comitês diferentes formados por 2 engenheiros e 3 economistas podem ser formados? E se dois dos economistas se recusarem a trabalhar juntos?

Solução: Começamos selecionando os engenheiros que farão parte do comitê. Como temos 5 disponíveis e precisamos escolher 2 destes, podemos fazer a seleção de $C_{5,2}$ formas distintas.

Selecionados os engenheiros do comitê, passamos a escolha dos economistas. De modo análogo, temos 7 pessoas disponíveis, de onde precisamos selecionar 3. Isso pode ser feito de $C_{7,3}$ formas distintas. Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos escolher o comitê de

$$C_{5,2} \times C_{7,3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 350$$

diferentes.

Exemplos Finais

Continuação do Exemplo 3: Vamos agora resolver o segundo problema. Uma dica importante em problemas de combinatória, é não adiar as complicações e tentar, na medida do possível, resolvê-las no princípio.

Assim, vamos começar selecionando os economistas do comitê. Para isso, comece contrariando os criadores de caso, e fixe os dois no comitê. Feito isso precisaríamos escolher apenas o último economista dentre os 5 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{5,1}$ formas distintas.

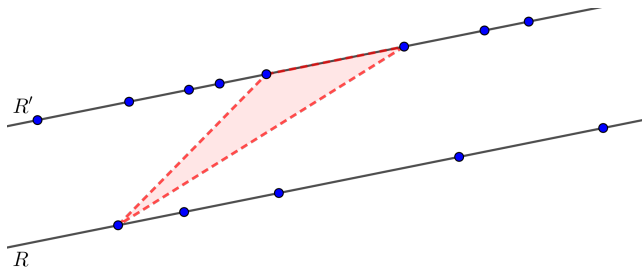
Assim temos

- $C_{5,1} = 5$ grupos contendo os economistas que não querem trabalhar juntos;
- há $C_{7,3} = 35$ grupos de 3 economistas no total.

E portanto existem $35 - 5 = 30$ grupos não contendo os dois criadores de caso. Finalmente, como há $C_{5,2} = 10$ maneiras de escolher os engenheiros. Teremos assim $30 \times 10 = 300$ maneiras de escolher os membros do comitê.

Exemplos Finais

Exemplo 4: Marcamos 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R . Quantos triângulos existem com vértices em três desses pontos?



Continuação do Exemplo 4:

Solução: Para começar observe que se 3 pontos em uma mesma reta não formam um triângulo! Assim, para formar um triângulo ou tomamos um vértice em R e dois em R' ou tomamos um vértice em R' e dois em R . Como

- para os triângulos do primeiro tipo temos
 - $C_{5,1}$ formar de escolher o vértice em R ;
 - $C_{8,2}$ formar de escolher o vértice em R' ;
- Isso nos dá um total de $C_{5,1} \times C_{8,2}$ triângulos do primeiro tipo;
- analogamente, o número de triângulos do segundo tipo é $C_{8,1} \times C_{5,2}$.

Assim, pelo princípio aditivo, a quantidade de triângulos que obtemos desta forma é

$$C_{5,1} \times C_{8,2} + C_{8,1} \times C_{5,2} = 5 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2!} + 8 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 220.$$

Continuação do exemplo 4: Outra solução...

Para formar um triângulo devemos escolher três pontos que não estejam situados sobre a mesma reta, dentre os 13 pontos dados. O número de modos de escolher 3 dos 13 pontos é $C_{13,3}$. Desse total devemos retirar as $C_{5,3}$ escolhas de pontos em R e as $C_{8,3}$ escolhas possíveis de 3 pontos em R . Assim a resposta é

$$C_{13,3} - C_{5,3} - C_{8,3} = 286 - 10 - 56 = 220.$$

Coeficientes Binomiais

Exemplo 5: Verifique que $C_{n,k} = C_{n,n-k}$.

Algebricamente é simples, e basta notar que $n - (n - k) = k$, de onde segue que

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = C_{n,n-k}.$$

Uma maneira combinatória de olhar o problema é o seguinte: se S é um conjunto com n elementos, o lado esquerdo a igualdade conta os subconjuntos de S com k elementos, enquanto o lado direito conta os subconjuntos de S com $(n - k)$ elementos.

Mas observe que para cada subconjunto A de S com k elementos existe outro com $(n - k)$ elementos: $S - A$ (o complemento de A com relação a S). Desta forma, para cada subconjunto com k elementos existe um único subconjunto com $(n - k)$ elementos, o que mostra que existe a mesma quantidade de ambos os tipos de subconjuntos.

Exercício: Verifique, usando um argumento combinatório, que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dica: Tome T um conjunto com n elemento e $a \in T$.

Sabemos que $\binom{n}{k}$ é o número subconjuntos de T com k elementos. Conte agora o total de subconjuntos de T que contém a e o total de subconjuntos que não contém a ...

termine o raciocínio...

Referências Bibliográficas



MORGADO, A., PITOMBEIRA, J., PINTO, P., FERNANDEZ P. Introdução à probabilidade e estatística. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.



SANTOS, J., MELLO, M., MURANI, I. Introdução à análise combinatória. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna, 2007.



LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.



ROSEN, K. H. Matemática discreta e suas aplicações. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.