

Combinatória (parte 4)

Teorema Binomial

Introdução à Probabilidade e Estatística

Professores: Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Universidade Federal do ABC

1 Objetivos

2 Teorema do Binômio

3 Referências Bibliográficas

Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada. Junto à essas notas o aluno deve ler os livros de texto da Bibliografia.

Objetivos

Neste pequeno grupo de slides pretendemos apresentar o Teorema Binomial (também conhecido como Binômio de Newton) junto com uma prova que usa argumentos combinatórios.

Teorema Binomial

O teorema binomial trata de como calcular potências do binômio $(x + y)$.
Por exemplo,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Analisando de perto e com algum cuidado vemos que, por exemplo, que

$$(x + y)^3 = \binom{3}{3}x^3 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 + \binom{3}{0}y^3,$$

e que algo similar acontece nas outras duas expressões...

Vamos ver a seguir que isto não é uma coincidência.

Teorema Binomial

Começamos explorando a expressão $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$, e para acompanhar melhor o raciocínio usaremos cores para identificar cada binômio. Usando a propriedade distributiva temos

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\&= (xx + xy + xy + yy)(x + y) \\&= (xx + xy + xy + yy)x + (xx + xy + xy + yy)y \\&= xxx + xxy + xxy + xyy + yxx + yxy + yxy + yyy \\&= xxx + (xyx + xxy + xxy) + (xyx + xxy + xxy) + xyy\end{aligned}$$

Observamos na expressão acima que cada termo $x^i y^{3-i}$ é formado escolhendo i termos x e $3 - i$ termos y , sendo um de cada binômio $(x + y)$.

Teorema Binomial

Assim, por exemplo, o termo x^2y pode ser escolhido de 3 formas (xyx , $xx\bar{y}$ ou $\bar{x}xy$). Combinatoriamente, podemos pensar que para montar cada opção destas, basta escolher os dois binômios de onde usaremos o x , e isso pode ser feito de $\binom{3}{2}$ formas!

De modo análogo, cada termo $x^i y^{n-i}$, $i = 0, 1, 2, 3$, pode ser escolhido de $\binom{n}{i}$ formas distintas!

Teorema Binomial

De modo geral, se queremos calcular o produto

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \dots (x + y)}_{n \text{ vezes}},$$

podemos seguir a mesma ideia.

Obtemos cada um dos termos escolhendo em cada parêntesis um x ou um y e multiplicando os escolhidos. Para cada i tal que $0 \leq i \leq n$, se escolhermos x nos primeiros i parêntesis então o y será escolhido nos outros $(n - i)$ parêntesis. Isto pode ser feito de $C_{n,i}$ modos. Então $(x + y)^n$ é uma soma com $C_{n,i}$ parcelas iguais a $x^i y^{n-i}$, isto é

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Teorema Binomial

Acabamos de verificar o seguinte teorema.

Teorema Binomial

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Exemplo 1: Se A é um conjunto com n elementos então para saber quantos subconjuntos tem A devemos somar a quantidade de subconjuntos de tamanho k , para $0 \leq k \leq n$. Usando esta observação e o Teorema Binomial podemos obter que o número de subconjuntos de A é 2^n .

Exatamente de que forma devemos usar o teorema?

Referências Bibliográficas

-  MORGADO, A., PITOMBEIRA, J., PINTO, P., FERNANDEZ P. Introdução à probabilidade e estatística. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.
-  SANTOS, J., MELLO, M., MURANI, I. Introdução à análise combinatória. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna, 2007.
-  LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
-  ROSEN, K. H. Matemática discreta e suas aplicações. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.