

Variáveis Aleatórias Contínuas: Esperança e Variância

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos além da referência principal do curso.

Vimos que X é v.a. contínua se existir $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, chamada **função de densidade de probabilidade (f.d.p.)** da v.a. X tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$.

A função f_X tem as seguintes propriedades:

- 1 Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f_X(a) \geq 0$;
- 2 $P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X dx = 1$.
- 3 Para todo $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$;
- 4 $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X dx$;

Para uma v.a. discreta X com função de probabilidade $p(x)$ definimos o valor esperado como sendo

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} x p(x).$$

Para as v.a. contínuas, mudamos o somatório por uma integral e a função de probabilidade pela função densidade de probabilidade e definimos o valor esperado da v.a. contínua X com f.d.p. $f(x)$ como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Observação: do mesmo modo que no caso discreto, podemos pensar na esperança de uma v.a. contínua como uma espécie de *ponto de equilíbrio*, em torno do qual valores de X se distribuem.

Exemplo

Se X é uma v.a. contínua com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0], \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{para } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Então

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx}_{f(x)=0, \text{ para } x < 0} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Para calcular a integral usamos o método de integração por partes. Fazemos $u = x$ e $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$. Desta forma $du = dx$ e $v = -e^{-\lambda x}$

$$\int_0^a x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^a - \int_0^a e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^a$$

Assim

$$E[X] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + a e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Se X é uma v.a. de um experimento aleatório com espaço amostral S e g é uma função de valor real g então a composição $g(X)$ é também uma v.a.

$$S \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(X)}$

Propriedades

Seja X é uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então:

- ❶ Para qualquer função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

- ❷ Se $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes então

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Suponhamos que uma v.a. X tem f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Calcule $E[e^X]$.

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e^1 - 1.$$

A variância de uma v.a. contínua é definida de forma igual à de uma v.a. discreta. Isto é, se X é uma v.a. contínua com valor esperado $E[X] = \mu$, então a variância de X é definida como

$$\text{Var}[X] = E \left[(X - \mu)^2 \right].$$

No caso contínuo também vale a igualdade

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2.$$

Para verificar isto suponhamos que X é uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$. Desta forma

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}_{E[X^2]} - 2\mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}_{\mu} + \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_1 \\&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\&= E[X^2] - \mu^2.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcular a variância da v.a. X é contínua com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0], \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{para } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

De um exemplo anterior temos que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, devemos então calcular $E[X^2]$. Vejamos

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx}_{f(x)=0, \text{ para } x < 0} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Se integramos por partes e com $u = x^2$ e $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, então $du = 2x dx$, $v = -e^{-\lambda x}$ e

$$\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty}}_0 + \underbrace{\frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx}_{E[X]} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Logo

$$\text{var}(X) = E[X^2] - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercício

Seja X uma v.a. com f.d.p. dada pela função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{para } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Calcule $E[X]$ e $Var[X]$.