

Distribuições Contínuas: Exponencial

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada, deixando para os textos, os detalhes teóricos e exemplos mais elaborados.

Vimos na semana passada que se X é uma v. a. contínua então:

- existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Tal função é chamada de *densidade* de X ;

- para todo $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$;
- a esperança de X é dada por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx,$$

onde f é a densidade de X ;

- e para $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) \, dx,$$

Estamos em uma antiga central telefônica, onde as chamadas não param de chegar, e aguardam em uma fila para serem atendidas. Suponha que essa central, com equipamento defasado, consegue atender uma média de 100 chamadas por segundo.

Como parte do processo de melhora do atendimento, a gerência a central resolveu iniciar um monitoramento das chamadas. Suponha ainda que o total $N(t)$ durante os primeiros t segundos de monitoramento tem distribuição de Poisson.

Seja T o tempo de espera da primeira chamada antes de ser atendida. Como podemos determinar a distribuição de T ?

Solução: Vamos começar a primeira parte do problema, onde nos deparamos com o número de chamadas atendidas.

Sabemos que $N(t)$ tem distribuição de Poisson, e como a média de chamadas atendidas é de 100 chamadas por segundo, até o instante t uma média de $100t$ chamadas são atendidas e $N(t) \sim \text{Poisson}(100t)$.

Voltando para T , começamos observando que ela mede o tempo e portanto podemos tratá-la como uma v.a. contínua.

Queremos então encontrar a densidade de T , ou até mesmo a sua função distribuição $F(t) = P(T \leq t)$.

Mas como T e $N(t)$ estão conectadas?

Para ver isso, primeiro note que se $T \leq t$ então a primeira chamada foi atendida até o instante t , e portanto $N(t) \geq 1$.

Da mesma forma, se $N(t) \geq 1$ então sabemos que a primeira chamada foi atendida até o instante t , o que nos dá que $T \leq t$.

Sabemos assim que $\{T \leq t\} = \{N(t) \geq 1\}$, e portanto

$$P(T \leq t) = P(N(t) \geq 1) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-100t}.$$

Assim, a função distribuição de T é dada por

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t < 0; \\ 1 - e^{-100t} & , \text{ se } t \geq 0 \end{cases} ,$$

e a densidade $f(t) = F'(t)$ é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t < 0; \\ 100e^{-100t} & , \text{ se } t \geq 0 \end{cases} .$$

A variável T é um exemplo das variáveis que estudaremos nestes slides: as variáveis com distribuição exponencial.

Definição 1 (Distribuição Exponencial)

Diremos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

Dizemos também que X é uma variável aleatória exponencial.

A função distribuição acumulada de X é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

Notação: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ou $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

Ainda no exemplo anterior, sabendo que a primeira chamada já está em espera há mais de 3 segundos, calcule a probabilidade dela ter que esperar, ao menos, mais 1 segundo antes de ser atendida.

Solução: Como chamamos de T o tempo de espera da primeira chamada, o que queremos calcular é

$$P(T > 3 + 1 | T > 3) = P(T > 4 | T > 3) = \frac{P(\{T > 4\} \cap \{T > 3\})}{P(T > 3)} = \frac{P(T > 4)}{P(T > 3)}.$$

Sabemos também que $T \sim \text{Exponencial}(100)$, e portanto para $t > 0$

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-100t}) = e^{-100t}.$$

Segue que $P(T > 3) = e^{-300}$ e $P(T > 4) = e^{-400}$, nos dando que

$$P(T > 4 | T > 3) = \frac{e^{-400}}{e^{-300}} = e^{-100}.$$

No exemplo anterior vimos que $P(T > 4 | T > 3) = e^{-100}$. Mas isso significa que

$$P(T > 3 + 1 | T > 3) = e^{-100} = P(T > 1).$$

Ou seja, a probabilidade da primeira chamada esperar mais um segundo tendo já esperado ao menos 3, é a mesma probabilidade que ela tinha de esperar um segundo no início do processo.

Essa propriedade é conhecida como *perda de memória*, e é característica fundamental de variáveis exponenciais, como vemos no seguinte resultado.

Proposição

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ então para todo $t, s > 0$

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t). \quad (1)$$

Além disso, se X é uma v.a. contínua positiva satisfazendo (1), então X tem distribuição exponencial.

A primeira parte da proposição anterior pode ser facilmente verificada, bastando para isso notar que se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ e $t, s > 0$, então

$$P(X > t + s | X > t) = \frac{P(\{X > t + s\} \cap \{X > t\})}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)}.$$

Assim, como

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t},$$

para $t > 0$, temos que

$$P(X > t + s | X > t) = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

A segunda parte usa técnicas que serão vistas apenas no curso de IEDO, e portanto fogem do escopo deste curso.

Vamos agora calcular a esperança de $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$. Para isso note que

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Integrando por partes, e fazendo $u = t$ e $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$, temos

$$\begin{array}{l|l} u = t & dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \\ du = dt & v = -e^{-\lambda t} \end{array}$$

e portanto

$$\int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda t}) dt = 0 - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

E assim $E[X] = \frac{1}{\lambda}$.

Para calcular $\text{Var}[X]$, vamos primeiro calcular $E[X^2]$. Note que

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Integrando novamente por partes, e fazendo $u = t^2$ e $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$, temos

$$\begin{array}{l|l} u = t^2 & dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \\ du = 2t dt & v = -e^{-\lambda t} \end{array}$$

e portanto

$$\int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = -t^2 e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-2te^{-\lambda t}) dt = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2},$$

onde a última igualdade segue de $E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Concluimos assim que

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Em resumo, encontramos que

Esperança e Variância

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, para $\lambda > 0$, então

$$E[X] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2},$$

e portanto o desvio padrão de X é

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}[X]} = \frac{1}{\lambda}.$$

Uma pessoa deixa todas as 20 lâmpadas de casa ligada, e sai de casa por uma semana. Considere que o tempo de vida de cada lâmpada depois de acesa é uma variável aleatória exponencial com tempo médio de vida de 30 dias e que, ao retornar para casa, cada lâmpada está funcionando ou queimada de maneira independente das demais. Qual a probabilidade de todas as lâmpadas ainda estarei funcionando quando a pessoa retorna?

Solução: Seja T_k o tempo de vida da lâmpada k , onde $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Sabemos que $T_k \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, para algum $\lambda > 0$ e que $E[T_k] = 30$ dias.

Deste modo

$$\frac{1}{\lambda} = E[T_k] = 30,$$

e portanto $\lambda = \frac{1}{30}$.

Assim $P(T_k \leq t) = 1 - e^{-t/30}$, para $t > 0$ e $k \in \{1, \dots, 10\}$.

A pessoa fica fora de casa 7 dias, e assim a probabilidade da lâmpada k estar funcionando é dada por

$$P(T_k > 7) = 1 - P(T_k \leq 7) = e^{-7/30} \approx 0,79188957,$$

para cada $k = \{1, \dots, 10\}$.

Mas sabemos também que os eventos $\{T_1 > 7\}, \dots, \{T_{10} > 7\}$ são independentes, de modo que se N é o total de lâmpadas funcionando, então $N \sim \text{Binomial}(10; 0,79188957)$, e a probabilidade de estarem todas funcionando é dada por

$$P(N = 10) = (0,79188957)^{10} = 0,09697.$$

Na verdade, podemos dizer mais, e ver que apesar da baixa probabilidade de estarem todas ainda ligadas, o número médio de lâmpadas acesas quando a pessoa volta é

$$E[N] = 10 \cdot 0,79188957 = 7,9188957.$$