

Distribuições Contínuas: Uniforme

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos além da referência principal do curso.

Vimos na semana passada que se X é uma v. a. contínua então:

- existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Tal função é chamada de *densidade* de X ;

- para todo $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$;
- a esperança de X é dada por

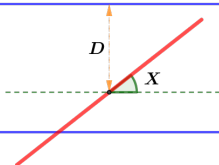
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx,$$

onde f é a densidade de X ;

- e para $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx,$$

Uma vareta é jogada ao acaso em um piso coberto por tábuas corridas, com 15 cm de largura. Defina por D a distância entre o centro da vareta e a tábua mais "acima", e por X o ângulo que a vareta faz com a direção das tábuas, como ilustrado na figura abaixo.



O que podemos falar sobre as distribuições de D e X ?

Solução: Começemos pela distância D . Primeiro notemos que o centro da vareta cairá em cima de uma das tábuas, de modo que a distância D para a tábua mais acima é tal que $0 \leq D < 15$, e D é uma v.a. contínua.

Como o problema diz que a vareta foi jogada ao acaso, podemos supor que a probabilidade do centro cair em uma certa região não pode depender da posição da região em questão.

Mas como isso se traduz na distribuição de D ?

Uma forma de entender a distribuição de D é definir $P(a < D < b)$, para $a, b \in [0, 15]$, $a < b$. Neste contexto nossa observação sobre a não dependência da posição poderia ser traduzida em:

$P(a < D < b)$ depende apenas do comprimento $b - a$, e não da posição de (a, b) dentro do intervalo $[0, 15]$.

E assim, para $0 \leq a \leq b < 15$, temos

$$P(a < D < b) = k \cdot (b - a).$$

E como $P(0 < D < 15) = 1$, então para $0 \leq a \leq b < 15$ teríamos

$$P(a < D < b) = \frac{b - a}{15}.$$

Mais do que isso, se $x \in [0, 15]$ temos que

$$P(D \leq x) = P(0 \leq D \leq x) = \frac{x}{15},$$

e portanto a função distribuição de D é dada por

$$F_D(x) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0; \\ \frac{x}{15} & , \text{ se } 0 \leq x < 15, \\ 1 & , \text{ se } x \geq 15 \end{cases}$$

e a função densidade de probabilidade $f_D(x) = F'_D(x)$ é dada por

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \text{ ou } x \geq 15; \\ \frac{1}{15} & , \text{ se } 0 \leq x < 15 \end{cases}.$$

O mesmo argumento pode ser feito para o ângulo X (fica como exercício), mostrando que X tem função distribuição dada por

$$F_X(\theta) = P(X \leq \theta) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \theta < 0; \\ \frac{\theta}{\pi} & , \text{ se } 0 \leq \theta < \pi, \\ 1 & , \text{ se } \theta \geq \pi \end{cases}$$

e função densidade de probabilidade $f_X(\theta) = F'(\theta)$ dada por

$$f_X(\theta) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \theta < 0 \text{ ou } \theta \geq \pi; \\ \frac{1}{\pi} & , \text{ se } 0 \leq \theta < \pi \end{cases}.$$

Observação 1

As variáveis D e X acima são exemplos da classe de variáveis que estudaremos nestas notas: as chamadas variáveis aleatórias uniformes, ou uniformemente distribuídas.

Definição 1 (Distribuição Uniforme)

Diremos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a,b]$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \quad \text{ou} \quad x > b; \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ se } a \leq x \leq b \end{cases}.$$

Frequentemente dizemos também que X é uma variável aleatória uniforme em $[a,b]$ ou que X é uniformemente distribuída no intervalo $[a,b]$.

A função distribuição acumulada de X é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \quad \text{ou} \quad x > b; \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ se } a \leq x < b \\ 1 & , \text{ se } x \geq b; \end{cases}.$$

Notação: $X \sim Unif[a,b]$ ou $X \sim Uniforme[a,b]$.

Ainda no exemplo anterior, calcule o valor esperado e variância de D e X .

Solução: Começando por D , lembremos que sua função densidade é dada por

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \text{ ou } x \geq 15; \\ \frac{1}{15} & , \text{ se } 0 \leq x < 15 \end{cases},$$

de modo que

$$\begin{aligned} E[D] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_D(x) dx \\ &= \int_0^{15} x \cdot \frac{1}{15} dx \\ &= \frac{1}{15} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{15} \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Para a variância devemos calcular primeiro $E[D^2]$, que é dada por

$$\begin{aligned} E[D^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_D(x) dx \\ &= \int_0^{15} x^2 \cdot \frac{1}{15} dx \\ &= \frac{1}{15} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{15} \\ &= \frac{15^2}{3} \\ &= 75. \end{aligned}$$

O que nos dá uma variância de

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 75 - \frac{15^2}{4} = \frac{75}{4}.$$

O valor esperado e variância de X podem ser calculados de maneira análoga, lembrando apenas que a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f_X(\theta) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \theta < 0 \text{ ou } \theta \geq \pi; \\ \frac{1}{\pi} & , \text{ se } 0 \leq \theta < \pi \end{cases}.$$

Deixamos como exercício mostrar que $E[X] = \frac{\pi}{2}$ e $Var[X] = \frac{\pi^2}{12}$.

Vamos agora calcular a esperança e variância de uma v.a. $X \sim \text{Uniforme}[a,b]$.

Lembrando que a função densidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \text{ ou } x > b; \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ se } a \leq x \leq b \end{cases},$$

temos que

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Para calcular $Var[X]$, vamos primeiro calcular $E[X^2]$. Assim temos

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Em resumo, encontramos que

Esperança e Variância

Se $X \sim \text{Uniforme}[a,b]$, então

$$E[X] = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12},$$

e portanto o desvio padrão de X é

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}[X]} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a).$$

Ônibus chegam em uma determinada parada em intervalos de 15 minutos começando às 7:00. Isto é, eles chegam às 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, e assim por diante. Se um passageiro chega na parada em um instante de tempo que é uniformemente distribuído entre 7:00 e 7:30, determine a probabilidade de que ele espere no máximo 5 minutos pelo próximo ônibus.

Solução: Chamando de T o instante em minutos, após as 7h, que o passageiro chega na parada, o problema nos diz que $T \sim \text{Uniforme}[0,30]$.

Estamos interessados na probabilidade do evento

$$A = \{\text{o passageiro espera no máximo 5 minutos}\}.$$

Como o ônibus chega com intervalos de 15 minutos, com o primeiro passando às 7h, temos que

$$A = \{T = 0\} \cup \{10 \leq T \leq 15\} \cup \{25 \leq T \leq 30\}.$$

O evento $\{T = 0\}$ representa a situação onde o passageiro chega ao ponto junto com o primeiro ônibus, mas como T é uma uniformemente distribuída em $[0,30]$, temos $P(T = 0) = 0$.

Assim

$$\begin{aligned}P(A) &= P(T = 0) + P(10 \leq T \leq 15) + P(25 \leq T \leq 30) \\&= 0 + \frac{15 - 10}{30} + \frac{30 - 25}{30} \\&= \frac{10}{30},\end{aligned}$$

e assim $P(A) = 0,333 \dots$

Dada uma v.a. $U \sim \text{Uniforme}[0,1]$, encontre a função distribuição acumulada e função densidade de probabilidade da variável

$$T = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda},$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante.