

Probabilidade Condicional e Independência - Exemplos

Cristian Coletti
Universidade Federal do ABC

Independência - Exemplo

Os eventos A e B descritos nos pontos seguintes são independentes:

- extraíndo uma carta de um baralho de cartas de Poker de 52, os eventos $A :=$ “a carta é de copas” e $B :=$ “a carta é um 3”;
- lançando dois dados regulares de 6 faces, os eventos $A :=$ “a soma vale 7” e $B :=$ “o primeiro dado dá como resultado 3”;
- se Andrea, Livio e Simone lançam cada um um dado regular de seis faces, os eventos $A :=$ “Andrea e Livio obtêm o mesmo resultado” e $B :=$ “Livio e Simone obtêm o mesmo resultado”.

Em todos estes exemplos, embora exista intuitivamente algum tipo de “influência” entre os eventos A e B , eles resultam independentes segundo a definição, porque o fato de um ocorrer não modifica a probabilidade do outro.

Exemplo (Verificação)

Verifiquemos a independência no terceiro caso, deixando os dois primeiros como exercício. Posto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tomemos como espaço amostral

$$S := X \times X \times X = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N}, 1 \leq x, y, z \leq 6\},$$

dotado da probabilidade P uniforme. Note-se que

$$A = \{(x, y, z) : x = y\},$$

$$B = \{(x, y, z) : y = z\}.$$

Pelo princípio fundamental da análise combinatória, os elementos de A são determinados pela escolha das componentes x e z , pelo que $|A| = 6 \cdot 6 = 36$ e, analogamente, $|B| = 36$.

Exemplo 1.64 (Conclusão)

Do mesmo modo, $A \cap B = \{(x, y, z) : x = y = z\}$ e, portanto, $|A \cap B| = 6$. Dado que $|S| = |X|^3 = 6^3 = 216$, segue que

$$P(A) = P(B) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = P(A)P(B).$$

como requerido. □

Exemplo - Independência

Consideramos o experimento aleatório dado pelo lançamento de dois dados regulares de seis faces, descrito pelo espaço amostral $S = \{1, 2, \dots, 6\}^2$ munido da probabilidade uniforme discreta P (Equiprobáveis). Consideramos os eventos:

- $A =$ “o resultado do segundo dado é 1, 2 ou 5”
 $= \{(i, j) : j = 1, 2, \text{ ou } 5\},$
- $B =$ “o resultado do segundo dado é 4, 5 ou 6”
 $= \{(i, j) : j = 4, 5, \text{ ou } 6\},$
- $C =$ “a soma dos resultados dos dois dados vale 9”
 $= \{(i, j) : i + j = 9\}$

Exemplo (Cálculos)

Tem-se então

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C),$$

mas

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(C).$$



Número de Sucessos e Instante de Primeiro Sucesso

Considere uma família finita $C_1, C_2, \dots, C_n$ de ensaios repetidos e independentes, ou seja, de eventos independentes com probabilidade $P(C_i) = p$.

Número de Sucessos e Instante de Primeiro Sucesso

Considere uma família finita $C_1, C_2, \dots, C_n$ de ensaios repetidos e independentes, ou seja, de eventos independentes com probabilidade $P(C_i) = p$.

Fazemo-nos as seguintes perguntas, para $l \in \{1, \dots, n\}$ e $k \in \{0, \dots, n\}$:

- (i) Qual é a probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra no l -ésimo ensaio?
- (ii) Qual é a probabilidade de que exatamente k ensaios tenham sucesso?

Pergunta (i): Instante do Primeiro Sucesso

Comecemos com a pergunta (i). Por definição, os sucessos nos n ensaios são representados pelos eventos $C_1, \dots, C_n$. Podemos, portanto, escrever:

$$B_l := \text{"o primeiro sucesso ocorre no } l\text{-ésimo ensaio"} = C_1^c \cap \dots \cap C_{l-1}^c \cap C_l$$

Pergunta (i): Instante do Primeiro Sucesso

Começamos com a pergunta (i). Por definição, os sucessos nos n ensaios são representados pelos eventos $C_1, \dots, C_n$. Podemos, portanto, escrever:

$$B_l := \text{"o primeiro sucesso ocorre no } l\text{-ésimo ensaio"} = C_1^c \cap \dots \cap C_{l-1}^c \cap C_l$$

Usando a independência dos eventos envolvidos, pela Proposição 1.69, obtém-se:

$$P(B_l) = P(C_1^c) \cdots P(C_{l-1}^c)P(C_l) = p(1-p)^{l-1}. \quad (1.65)$$

Note-se que este último valor não depende de n .

Pergunta (ii): Exatamente k Sucessos

Passemos agora à pergunta (ii). Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$A_k := \text{“exatamente } k \text{ ensaios têm sucesso”}. \quad (1.66)$$

Pergunta (ii): Exatamente k Sucessos

Passemos agora à pergunta (ii). Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$A_k := \text{“exatamente } k \text{ ensaios têm sucesso”}. \quad (1.66)$$

Podemos expressar A_k em função dos eventos $C_1, \dots, C_n$, especificando quais ensaios tiveram sucesso. Por exemplo:

$$D_{\{1, \dots, k\}} := (C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k) \cap (C_{k+1}^c \cap C_{k+2}^c \cap \dots \cap C_n^c) \quad (1.67)$$

representa o evento “os primeiros k ensaios tiveram sucesso, os restantes $n - k$ não tiveram sucesso”: este é um subconjunto de A_k com probabilidade:

$$P(D_{\{1, \dots, k\}}) = (P(C_1) \cdots P(C_k))(P(C_{k+1}^c) \cdots P(C_n^c)) = p^k(1 - p)^{n-k}$$

Análise Combinatória dos Ensaio

Para obter o evento A_k inteiro, devemos considerar todas as possibilidades em que exatamente k ensaios têm sucesso (não necessariamente os primeiros k).

Análise Combinatória dos Ensaio

Para obter o evento A_k inteiro, devemos considerar todas as possibilidades em que exatamente k ensaios têm sucesso (não necessariamente os primeiros k).

Se fixarmos um subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinalidade $|I| = k$, que identifica um subconjunto de k ensaios, a probabilidade de que esses ensaios tenham sucesso e os restantes não tenham sucesso vale $p^k(1 - p)^{n-k}$ exatamente como em (1.67), por simetria.

Para obter o evento A_k inteiro, devemos considerar todas as possibilidades em que exatamente k ensaios têm sucesso (não necessariamente os primeiros k).

Se fixarmos um subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinalidade $|I| = k$, que identifica um subconjunto de k ensaios, a probabilidade de que esses ensaios tenham sucesso e os restantes não tenham sucesso vale $p^k(1-p)^{n-k}$ exatamente como em (1.67), por simetria.

Dado que existem $\binom{n}{k}$ escolhas possíveis para o conjunto I , obtém-se:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1.68)$$

Justificativa Formal da Fórmula (1.68)

Podemos justificar mais precisamente a fórmula (1.68). Fixado um subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, definimos o evento $D_I :=$ “os ensaios com índices em I tiveram sucesso, os outros ensaios tiveram insucesso”, que se pode expressar da seguinte forma:

$$D_I := \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} C_j^c \right). \quad (1.69)$$

Justificativa Formal da Fórmula (1.68)

Podemos justificar mais precisamente a fórmula (1.68). Fixado um subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, definimos o evento $D_I :=$ “os ensaios com índices em I tiveram sucesso, os outros ensaios tiveram insucesso”, que se pode expressar da seguinte forma:

$$D_I := \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} C_j^c \right). \quad (1.69)$$

Se considerarmos a união dos eventos D_I , ao variar dos subconjuntos I com exatamente k índices, obtemos justamente o evento A_k :

$$A_k = \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=k} D_I \implies P(A_k) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=k} P(D_I), \quad (1.70)$$

porque a união é disjunta: $D_I \cap D_{I'} = \emptyset$ para $I \neq I'$.

Conclusão da Demonstração

Determinemos agora $P(D_I)$. O evento D_I é dado pela interseção de alguns entre os eventos $C_1, \dots, C_n$ — aqueles com índices em I — e dos complementares dos eventos restantes.

Conclusão da Demonstração

Determinemos agora $P(D_I)$. O evento D_I é dado pela interseção de alguns entre os eventos $C_1, \dots, C_n$ — aqueles com índices em I — e dos complementares dos eventos restantes.

Pela Proposição 1.69, tem-se, portanto:

$$P(D_I) = \left(\prod_{i \in I} P(C_i) \right) \cdot \left(\prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} P(C_j^c) \right) = p^{|I|} \cdot (1 - p)^{n - |I|},$$

porque $P(C_i) = p$ e $P(C_j^c) = 1 - P(C_j) = 1 - p$ para quaisquer i, j .

Conclusão da Demonstração

Determinemos agora $P(D_I)$. O evento D_I é dado pela interseção de alguns entre os eventos $C_1, \dots, C_n$ — aqueles com índices em I — e dos complementares dos eventos restantes.

Pela Proposição 1.69, tem-se, portanto:

$$P(D_I) = \left(\prod_{i \in I} P(C_i) \right) \cdot \left(\prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} P(C_j^c) \right) = p^{|I|} \cdot (1 - p)^{n - |I|},$$

porque $P(C_i) = p$ e $P(C_j^c) = 1 - P(C_j) = 1 - p$ para quaisquer i, j . In

particular, se $|I| = k$, o valor de $P(D_I) = p^k(1 - p)^{n - k}$ não depende de I . Dado que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos possíveis $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ com $|I| = k$, graças a (1.70) obtemos finalmente (1.68).

Observação 1.77

A expressão (1.68) coincide com a fórmula (1.40) obtida no Exemplo 1.45.

Observação 1.77

A expressão (1.68) coincide com a fórmula (1.40) obtida no Exemplo 1.45.

Mais explicitamente, para $p = M/N$, a fórmula (1.68) fornece a probabilidade de que, efetuando n extrações com reposição de uma urna que contém N bolas, das quais M são vermelhas, exatamente k das bolas extraídas sejam vermelhas.

Observação 1.77

A expressão (1.68) coincide com a fórmula (1.40) obtida no Exemplo 1.45.

Mais explicitamente, para $p = M/N$, a fórmula (1.68) fornece a probabilidade de que, efetuando n extrações com reposição de uma urna que contém N bolas, das quais M são vermelhas, exatamente k das bolas extraídas sejam vermelhas.

Naturalmente não se trata de um acaso: os eventos $C_i :=$ “a i -ésima bola extraída é vermelha” são n ensaios repetidos e independentes com probabilidade de sucesso p (exercício).

Exemplo (Inserção de objetos em gavetas)

Damos agora um exemplo de grande relevância teórica e aplicativa, que reencontraremos no seguimento (vejam-se os Exemplos 3.124 e 7.1.5).

Exemplo (Inserção de objetos em gavetas)

Damos agora um exemplo de grande relevância teórica e aplicativa, que reencontraremos no seguimento (vejam-se os Exemplos 3.124 e 7.1.5).

Supomos inserir aleatoriamente n objetos distintos em r gavetas disponíveis (cada gaveta pode conter um número qualquer de objetos). Fixamos $k \in \{0, \dots, n\}$ e perguntamos qual é a probabilidade de que exatamente k objetos terminem na primeira gaveta.

Exemplo (Inserção de objetos em gavetas)

Damos agora um exemplo de grande relevância teórica e aplicativa, que reencontraremos no seguimento (vejam-se os Exemplos 3.124 e 7.1.5).

Supomos inserir aleatoriamente n objetos distintos em r gavetas disponíveis (cada gaveta pode conter um número qualquer de objetos). Fixamos $k \in \{0, \dots, n\}$ e perguntamos qual é a probabilidade de que exatamente k objetos terminem na primeira gaveta.

Numeramos os objetos de 1 a n e definimos para $i = 1, \dots, n$ o evento:

$$C_i := \text{"o } i\text{-ésimo objeto é inserido na primeira gaveta"}.$$

Então $C_1, \dots, C_n$ constituem n ensaios repetidos e independentes com probabilidade de sucesso $p = 1/r$.

Exemplo (Conclusão)

De consequência, usando a fórmula (1.68), a probabilidade do evento $A_k :=$ “exatamente k objetos terminem na primeira gaveta” vale:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

com

$$p = \frac{1}{r}.$$



Exemplo (Paradoxo de Monty Hall)

O apresentador de um programa de prêmios propõe que você escolha uma de três cartas fechadas (envelopes). Das três cartas, uma contém um prêmio enquanto as outras duas estão vazias.

Exemplo (Paradoxo de Monty Hall)

O apresentador de um programa de prêmios propõe que você escolha uma de três cartas fechadas (envelopes). Das três cartas, uma contém um prêmio enquanto as outras duas estão vazias.

Depois que você faz a escolha, o apresentador abre uma das duas cartas restantes, mostrando que ela está vazia, e propõe que você mude a carta que escolheu pela outra que sobrou.

Exemplo (Paradoxo de Monty Hall)

O apresentador de um programa de prêmios propõe que você escolha uma de três cartas fechadas (envelopes). Das três cartas, uma contém um prêmio enquanto as outras duas estão vazias.

Depois que você faz a escolha, o apresentador abre uma das duas cartas restantes, mostrando que ela está vazia, e propõe que você mude a carta que escolheu pela outra que sobrou.

O que convém a você fazer?

Exemplo (Análise Inicial)

A despeito da formulação elementar, este problema esconde diversas armadilhas, que são de certa forma semelhantes às que analisaremos no exemplo subsequente (Exemplo)

Exemplo (Análise Inicial)

A despeito da formulação elementar, este problema esconde diversas armadilhas, que são de certa forma semelhantes às que analisaremos no exemplo subsequente (Exemplo)

Para modelar o problema, numeramos as cartas de 1 a 3 e assumimos que a carta escolhida inicialmente pelo jogador seja a carta 1 (o que não introduz nenhuma perda de generalidade por razões óbvias de simetria).

Exemplo (Análise Inicial)

A despeito da formulação elementar, este problema esconde diversas armadilhas, que são de certa forma semelhantes às que analisaremos no exemplo subsequente (Exemplo)

Para modelar o problema, numeramos as cartas de 1 a 3 e assumimos que a carta escolhida inicialmente pelo jogador seja a carta 1 (o que não introduz nenhuma perda de generalidade por razões óbvias de simetria).

Introduzimos os seguintes eventos para $i, j = 1, 2, 3$:

$A_i :=$ “o prêmio está na carta i ”,

$B_j :=$ “o apresentador abre a carta j ”.

Exemplo (Atribuição de Probabilidades)

Pela descrição do jogo, a atribuição das probabilidades para a posição do prêmio é uniforme, ou seja, $P(A_i) = 1/3$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Exemplo (Atribuição de Probabilidades)

Pela descrição do jogo, a atribuição das probabilidades para a posição do prêmio é uniforme, ou seja, $P(A_i) = 1/3$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Vejamos agora o comportamento do apresentador (e, portanto, as probabilidades condicionais de B_j dado A_i):

- Se o prêmio estiver na carta 1 (evento A_1), o apresentador pode abrir indiferentemente a carta 2 ou a carta 3. Assumimos que ele escolha com igual probabilidade:

$$P(B_2|A_1) = P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}.$$

Exemplo (Atribuição de Probabilidades)

Pela descrição do jogo, a atribuição das probabilidades para a posição do prêmio é uniforme, ou seja, $P(A_i) = 1/3$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Vejamos agora o comportamento do apresentador (e, portanto, as probabilidades condicionais de B_j dado A_i):

- Se o prêmio estiver na carta 1 (evento A_1), o apresentador pode abrir indiferentemente a carta 2 ou a carta 3. Assumimos que ele escolha com igual probabilidade:

$$P(B_2|A_1) = P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}.$$

- Se o prêmio estiver na carta 2 (evento A_2), o apresentador, não podendo abrir nem a carta escolhida pelo jogador (a carta 1) nem a carta com o prêmio (a carta 2), é forçado a abrir a carta 3:

$$P(B_3|A_2) = 1, \quad P(B_2|A_2) = 0.$$

Exemplo (Atribuição de Probabilidades)

Pela descrição do jogo, a atribuição das probabilidades para a posição do prêmio é uniforme, ou seja, $P(A_i) = 1/3$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Vejamos agora o comportamento do apresentador (e, portanto, as probabilidades condicionais de B_j dado A_i):

- Se o prêmio estiver na carta 1 (evento A_1), o apresentador pode abrir indiferentemente a carta 2 ou a carta 3. Assumimos que ele escolha com igual probabilidade:

$$P(B_2|A_1) = P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}.$$

- Se o prêmio estiver na carta 2 (evento A_2), o apresentador, não podendo abrir nem a carta escolhida pelo jogador (a carta 1) nem a carta com o prêmio (a carta 2), é forçado a abrir a carta 3:

$$P(B_3|A_2) = 1, \quad P(B_2|A_2) = 0.$$

- Se o prêmio estiver na carta 3 (evento A_3), simetricamente o

Exemplo (Cálculo das Probabilidades Totais)

Suponhamos agora que o apresentador abra a carta 3 (o caso em que abre a carta 2 é perfeitamente simétrico). Pela fórmula da probabilidade total (Teorema 1.54), a probabilidade de que o apresentador abra a carta 3 é dada por:

Exemplo (Cálculo das Probabilidades Totais)

Suponhamos agora que o apresentador abra a carta 3 (o caso em que abre a carta 2 é perfeitamente simétrico). Pela fórmula da probabilidade total (Teorema 1.54), a probabilidade de que o apresentador abra a carta 3 é dada por:

$$\begin{aligned}P(B_3) &= P(B_3|A_1)P(A_1) + P(B_3|A_2)P(A_2) + P(B_3|A_3)P(A_3) \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Para avaliar se convém mudar de carta, devemos calcular a probabilidade condicional de que o prêmio esteja na carta 1 (estratégia de manter a escolha) ou na carta 2 (estratégia de mudar a escolha), dado que o apresentador abriu a carta 3.

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Para avaliar se convém mudar de carta, devemos calcular a probabilidade condicional de que o prêmio esteja na carta 1 (estratégia de manter a escolha) ou na carta 2 (estratégia de mudar a escolha), dado que o apresentador abriu a carta 3.

Usando a fórmula de Bayes (Teorema 1.59), obtemos:

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Para avaliar se convém mudar de carta, devemos calcular a probabilidade condicional de que o prêmio esteja na carta 1 (estratégia de manter a escolha) ou na carta 2 (estratégia de mudar a escolha), dado que o apresentador abriu a carta 3.

Usando a fórmula de Bayes (Teorema 1.59), obtemos:

$$P(A_1|B_3) = \frac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Para avaliar se convém mudar de carta, devemos calcular a probabilidade condicional de que o prêmio esteja na carta 1 (estratégia de manter a escolha) ou na carta 2 (estratégia de mudar a escolha), dado que o apresentador abriu a carta 3.

Usando a fórmula de Bayes (Teorema 1.59), obtemos:

$$P(A_1|B_3) = \frac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_2|B_3) = \frac{P(B_3|A_2)P(A_2)}{P(B_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo (Conclusão)

Conclui-se que convém mudar! De fato, a estratégia de mudar a carta duplica a probabilidade de vitória, que passa de $1/3$ para $2/3$.

Exemplo (Conclusão)

Conclui-se que convém mudar! De fato, a estratégia de mudar a carta duplica a probabilidade de vitória, que passa de $1/3$ para $2/3$.

A intuição falha frequentemente neste problema porque tende-se a esquecer que a escolha do apresentador não é puramente aleatória, mas é rigidamente vinculada pelo fato de ele conhecer a posição do prêmio e não poder abrir a carta selecionada pelo jogador. $\square$

Exemplo (Um caso judicial)

Apresentamos agora uma história trágica, que trata de um homicídio no contexto de violência conjugal. Uma mulher foi assassinada e o marido era o principal suspeito.

Exemplo (Um caso judicial)

Apresentamos agora uma história trágica, que trata de um homicídio no contexto de violência conjugal. Uma mulher foi assassinada e o marido era o principal suspeito.

No decorrer das investigações, descobriu-se que o marido havia espancado a esposa várias vezes. A acusação afirmou que este fato representava um importante indício de culpabilidade.

Exemplo (Um caso judicial)

Apresentamos agora uma história trágica, que trata de um homicídio no contexto de violência conjugal. Uma mulher foi assassinada e o marido era o principal suspeito.

No decorrer das investigações, descobriu-se que o marido havia espancado a esposa várias vezes. A acusação afirmou que este fato representava um importante indício de culpabilidade.

A defesa rebateu que, segundo os dados fornecidos pela Polícia do Estado, entre os homens que espancam suas esposas, apenas 1 em 10.000 acaba por assassiná-la; portanto, tal dado contribuía apenas de forma muito marginal para a tese de culpabilidade. Em primeira instância, o juiz aceitou a tese da defesa.

Exemplo (O Erro da Defesa)

Em segunda instância, a acusação apontou o seguinte erro no argumento da defesa: o dado correto a ser considerado não é a probabilidade de que um homem que espanca a esposa venha a assassiná-la, mas sim a probabilidade de que o assassino seja o marido que a espancava, **sabendo que a mulher foi assassinada**.

Exemplo (O Erro da Defesa)

Em segunda instância, a acusação apontou o seguinte erro no argumento da defesa: o dado correto a ser considerado não é a probabilidade de que um homem que espanca a esposa venha a assassiná-la, mas sim a probabilidade de que o assassino seja o marido que a espancava, **sabendo que a mulher foi assassinada**.

Para formalizar o problema, introduzimos os seguintes eventos:

$A :=$ “a mulher foi assassinada pelo marido”,

$B :=$ “a mulher foi assassinada (por qualquer pessoa)”,

$C :=$ “a mulher sofria violência por parte do marido”.

Exemplo (Dados Estatísticos)

O que as investigações nos dizem é que o evento C ocorreu. Além disso, como a mulher está morta, o evento B também ocorreu. Queremos, portanto, calcular a probabilidade condicional $P(A|B \cap C)$.

Exemplo (Dados Estatísticos)

O que as investigações nos dizem é que o evento C ocorreu. Além disso, como a mulher está morta, o evento B também ocorreu. Queremos, portanto, calcular a probabilidade condicional $P(A|B \cap C)$.

Estimamos as probabilidades com base em dados estatísticos reais de um país com características semelhantes:

- O dado fornecido pela defesa nos diz que $P(B \cap A^c|C) \simeq \frac{1}{10.000}$ (probabilidade de que ela seja assassinada por outra pessoa, dado que sofria violência).

Exemplo (Dados Estatísticos)

O que as investigações nos dizem é que o evento C ocorreu. Além disso, como a mulher está morta, o evento B também ocorreu. Queremos, portanto, calcular a probabilidade condicional $P(A|B \cap C)$.

Estimamos as probabilidades com base em dados estatísticos reais de um país com características semelhantes:

- O dado fornecido pela defesa nos diz que $P(B \cap A^c|C) \simeq \frac{1}{10.000}$ (probabilidade de que ela seja assassinada por outra pessoa, dado que sofria violência).
- Estatísticas criminais indicam que, em média, a cada ano, 1 em cada 25.000 mulheres casadas é assassinada pelo marido, e que o risco duplica se ela sofrer violência: $P(A|C) \simeq \frac{1}{12.500}$.

Exemplo (Dados Estatísticos)

O que as investigações nos dizem é que o evento C ocorreu. Além disso, como a mulher está morta, o evento B também ocorreu. Queremos, portanto, calcular a probabilidade condicional $P(A|B \cap C)$.

Estimamos as probabilidades com base em dados estatísticos reais de um país com características semelhantes:

- O dado fornecido pela defesa nos diz que $P(B \cap A^c|C) \simeq \frac{1}{10.000}$ (probabilidade de que ela seja assassinada por outra pessoa, dado que sofria violência).
- Estatísticas criminais indicam que, em média, a cada ano, 1 em cada 25.000 mulheres casadas é assassinada pelo marido, e que o risco duplica se ela sofrer violência: $P(A|C) \simeq \frac{1}{12.500}$.
- Obviamente, $P(B|A \cap C) = 1$, pois se ela foi assassinada pelo marido, ela foi assassinada.

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Podemos decompor o evento B (ser assassinada) como a união disjunta de ser assassinada pelo marido (A) ou por outra pessoa (A^c):

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c).$$

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Podemos decompor o evento B (ser assassinada) como a união disjunta de ser assassinada pelo marido (A) ou por outra pessoa (A^c):

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c).$$

Condicionando ao evento C , obtemos:

$$\begin{aligned} P(B|C) &= P(A|C) + P(B \cap A^c|C) \\ &\simeq \frac{1}{12.500} + \frac{1}{10.000} = \frac{9}{50.000}. \end{aligned}$$

Exemplo (Aplicação da Fórmula de Bayes)

Podemos decompor o evento B (ser assassinada) como a união disjunta de ser assassinada pelo marido (A) ou por outra pessoa (A^c):

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c).$$

Condicionando ao evento C , obtemos:

$$\begin{aligned} P(B|C) &= P(A|C) + P(B \cap A^c|C) \\ &\simeq \frac{1}{12.500} + \frac{1}{10.000} = \frac{9}{50.000}. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Bayes, temos:

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B|A \cap C)P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12.500}}{\frac{9}{50.000}} = \frac{4}{9} \simeq 44,4\%.$$

Exemplo (Conclusão)

A probabilidade de 44,4% mostra que o fato de o marido espancar a esposa não é um indício marginal, mas sim um elemento de enorme peso contra o suspeito.

Exemplo (Conclusão)

A probabilidade de 44,4% mostra que o fato de o marido espancar a esposa não é um indício marginal, mas sim um elemento de enorme peso contra o suspeito.

Ademais, se adicionarmos a informação de que a probabilidade de um assassino qualquer (que não seja o marido) espancar a vítima antes do crime é muito baixa, a probabilidade de que o marido seja o assassino se ele já a agredia torna-se $p \geq \frac{10}{11} \simeq 91\%$.

Exemplo (Conclusão)

A probabilidade de 44,4% mostra que o fato de o marido espancar a esposa não é um indício marginal, mas sim um elemento de enorme peso contra o suspeito.

Ademais, se adicionarmos a informação de que a probabilidade de um assassino qualquer (que não seja o marido) espancar a vítima antes do crime é muito baixa, a probabilidade de que o marido seja o assassino se ele já a agredia torna-se $p \geq \frac{10}{11} \simeq 91\%$.

O marido foi posteriormente condenado. □