

Probabilidade Condicional e Independência

Abordagem Teórica e Prática

Prof. Cristian Favio Coletti
CMCC - UFABC

15 de junho de 2026

A Intuição por Trás da Condicional

- No cálculo de probabilidades, frequentemente estamos interessados em reavaliar a chance de um evento ocorrer dado que possuímos informação parcial sobre o resultado do experimento.
- Considere o espaço amostral S . Se sabemos que um evento F ocorreu ($P(F) > 0$), o espaço de resultados possíveis efetivamente se reduz de S para F .
- Para que um evento E ocorra sob essa nova circunstância, o resultado real deve pertencer a ambos, E e F . Logo, deve pertencer a $E \cap F$.

Definição: Probabilidade Condicional

Se E e F são eventos em um espaço amostral S , a probabilidade condicional de E dado que F ocorreu, denotada por $P(E|F)$, é definida por:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad \text{desde que } P(F) > 0$$

Nota Importante

Se todos os resultados em S forem igualmente prováveis, a definição coincide com a contagem direta de casos favoráveis no novo espaço reduzido:

$$P(E|F) = \frac{N(E \cap F)}{N(F)}$$

Exemplo 1: O Lançamento de Dois Dados

Problema

Dois dados honestos são lançados. Sabendo que a soma dos pontos é igual a 6, qual é a probabilidade de que o primeiro dado tenha mostrado o número 4?

Exemplo 1: O Lançamento de Dois Dados

Problema

Dois dados honestos são lançados. Sabendo que a soma dos pontos é igual a 6, qual é a probabilidade de que o primeiro dado tenha mostrado o número 4?

Solução:

- Seja F o evento "soma dos pontos é igual a 6".
 $F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \implies N(F) = 5.$
- Seja E o evento "o primeiro dado é 4".
 $E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}.$
- A interseção é $E \cap F = \{(4, 2)\} \implies N(E \cap F) = 1.$

Portanto, por contagem direta ou pela definição:

$$P(E|F) = \frac{N(E \cap F)}{N(F)} = \frac{1}{5}$$

Exemplo 2: Composição Familiar

Problema

Uma família possui duas crianças. Assuma que a probabilidade de nascer menino ou menina é idêntica e independente. Se sabemos que pelo menos uma das crianças é um menino, qual é a probabilidade de que ambas sejam meninos?

Exemplo 2: Composição Familiar

Problema

Uma família possui duas crianças. Assuma que a probabilidade de nascer menino ou menina é idêntica e independente. Se sabemos que pelo menos uma das crianças é um menino, qual é a probabilidade de que ambas sejam meninos?

Solução:

- Espaço amostral original: $S = \{(m, m), (m, f), (f, m), (f, f)\}$, onde cada par é equiprovável ($P = 1/4$).
- Seja F o evento "pelo menos um menino": $F = \{(m, m), (m, f), (f, m)\}$.
- Seja E o evento "ambas são meninos": $E = \{(m, m)\}$.
- Note que $E \cap F = \{(m, m)\}$.

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

A Regra Multiplicativa da Probabilidade

Multiplicando ambos os lados da definição por $P(F)$, obtemos uma ferramenta crucial para a probabilidade sequencial.

Teorema: Regra do Produto

$$P(E \cap F) = P(F)P(E|F)$$

Generalização para n eventos:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = & P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \\ & \cdots P(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

Exemplo 3: Retiradas Sem Reposição

Problema

Uma urna contém 5 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição. Qual é a probabilidade de que ambas sejam brancas?

Exemplo 3: Retiradas Sem Reposição

Problema

Uma urna contém 5 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição. Qual é a probabilidade de que ambas sejam brancas?

Solução:

- Seja B_1 o evento "a primeira bola é branca".
- Seja B_2 o evento "a segunda bola é branca".
- Claramente, $P(B_1) = \frac{5}{9}$.
- Dado que a primeira bola foi branca, restam 4 brancas e 4 vermelhas na urna. Logo, $P(B_2|B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Pela regra multiplicativa:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

Lei da Probabilidade Total

Suponha que os eventos $F_1, F_2, \dots, F_n$ sejam mutuamente exclusivos e exaustivos, ou seja, eles formam uma partição do espaço amostral S ($\bigcup_{i=1}^n F_i = S$ e $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$).

Teorema da Probabilidade Total

Para qualquer evento E :

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$$

Caso particular clássico (F e F^c):

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

Exemplo 4: Linhas de Produção

Problema

Uma fábrica possui duas máquinas, A e B , que produzem 60% e 40% do total de peças, respectivamente. O percentual de peças defeituosas da máquina A é de 2%, enquanto o da máquina B é de 5%. Se uma peça é selecionada ao acaso, qual a probabilidade de ela ser defeituosa?

Exemplo 4: Linhas de Produção

Problema

Uma fábrica possui duas máquinas, A e B , que produzem 60% e 40% do total de peças, respectivamente. O percentual de peças defeituosas da máquina A é de 2%, enquanto o da máquina B é de 5%. Se uma peça é selecionada ao acaso, qual a probabilidade de ela ser defeituosa?

Solução:

- Eventos: A (peça da máquina A), B (peça da máquina B), D (peça defeituosa).
- Dados: $P(A) = 0,60$, $P(B) = 0,40$, $P(D|A) = 0,02$, $P(D|B) = 0,05$.

Pela Lei da Probabilidade Total:

$$\begin{aligned}P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\&= (0,02 \times 0,60) + (0,05 \times 0,40) \\&= 0,012 + 0,020 = 0,032 \text{ (ou } 3,2\%) \end{aligned}$$

O Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite "inverter" as probabilidades condicionais, calculando a probabilidade de uma causa (efeito causal latente) dado que o efeito visível ocorreu.

Teorema de Bayes

Se $F_1, F_2, \dots, F_n$ formam uma partição de S , então para cada $j = 1, \dots, n$:

$$P(F_j|E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

Esse teorema é a espinha dorsal da inferência estatística, onde atualizamos nossas crenças (a priori, $P(F_j)$) para obter novas crenças após observar dados (a posteriori, $P(F_j|E)$).

Exemplo 5: O Falso Positivo em Testes Médicos

Problema (Clássico de Sheldon Ross)

Uma doença rara atinge 0,5% de uma população. Um teste clínico para detectá-la tem precisão de 99% (sensibilidade: dá positivo se o paciente tem a doença). O teste também gera 5% de falsos positivos (dá positivo em pessoas saudáveis). Se um indivíduo escolhido ao acaso testa positivo, qual a probabilidade real de ele ter a doença?

Exemplo 5: O Falso Positivo em Testes Médicos

Problema (Clássico de Sheldon Ross)

Uma doença rara atinge 0,5% de uma população. Um teste clínico para detectá-la tem precisão de 99% (sensibilidade: dá positivo se o paciente tem a doença). O teste também gera 5% de falsos positivos (dá positivo em pessoas saudáveis). Se um indivíduo escolhido ao acaso testa positivo, qual a probabilidade real de ele ter a doença?

Solução:

- Seja D o evento "tem a doença" e T^+ o evento "teste positivo".
- $P(D) = 0,005 \implies P(D^c) = 0,995$.
- $P(T^+|D) = 0,99$ e $P(T^+|D^c) = 0,05$.

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(D|T^+) = \frac{P(T^+|D)P(D)}{P(T^+|D)P(D) + P(T^+|D^c)P(D^c)}$$

$$P(D|T^+) = \frac{0,99 \times 0,005}{(0,99 \times 0,005) + (0,05 \times 0,995)} = \frac{0,00495}{0,00495 + 0,04975} \approx 0,0905$$

Apenas 9,05% de chance real de infecção! Por que tão baixo? Porque a doença é muito rara

Independência de Eventos

Intuitivamente, dois eventos E e F são independentes se a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro. Ou seja, $P(E|F) = P(E)$.

Definição Formal: Independência

Dois eventos E e F são ditos independentes se, e somente se:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Se essa igualdade não se mantiver, os eventos são chamados de dependentes.

Aviso Geométrico

Não confunda eventos **independentes** com eventos **mutuamente exclusivos** (disjuntos). Se $E \cap F = \emptyset$, então $P(E \cap F) = 0$. Se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, eles *nunca* serão independentes, pois a ocorrência de um impede drasticamente a ocorrência do outro!

Exemplo 6: Lançamento de Cartas

Problema

Uma carta é retirada ao acaso de um baralho tradicional de 52 cartas. Considere os eventos: A : "a carta é um Ás" e B : "a carta é de Copas ($\heartsuit$)". Os eventos A e B são independentes?

Exemplo 6: Lançamento de Cartas

Problema

Uma carta é retirada ao acaso de um baralho tradicional de 52 cartas. Considere os eventos: A : "a carta é um Ás" e B : "a carta é de Copas ($\heartsuit$)". Os eventos A e B são independentes?

Solução:

- No baralho, há 4 Áses, logo $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- Há 13 cartas de Copas, logo $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
- O evento $A \cap B$ representa tirar o "Ás de Copas". Como há apenas um no baralho, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.

Verificando a condição de independência:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$$

Como a igualdade é válida, os eventos são independentes.

- A probabilidade condicional formaliza a atualização do nosso conhecimento diante de novas evidências.
- A Lei da Probabilidade Total serve para quebrar problemas complexos em cenários condicionais mais simples.
- O Teorema de Bayes nos permite realizar inferência reversa (efeito $\implies$ causa), sendo a base de sistemas modernos de inteligência artificial e diagnósticos.
- A independência simplifica drasticamente o cálculo da probabilidade conjunta através do produto simples das probabilidades marginais.