

Variáveis Aleatórias: Definições e Exemplos

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada, deixando para os textos da bibliografia os detalhes teóricos e exemplos mais elaborados.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos da bibliografia.

Comecemos com um exemplo...

Suponha o experimento de lançar dois dados não viciados. Existem diversas quantidades associadas à um experimento como esse que podem ser de interesse. Defina, por exemplo:

- X_1 = valor rolado no primeiro dado;
- X_2 = valor rolado no segundo dado;
- S = soma dos valores rolados em cada dado;
- U = maior valor rolado.

Cada uma das quantidades acima pode assumir uma série de valores, dependendo do resultado obtido no experimento aleatório.

Se olharmos para S , por exemplo, teremos que $S = 3$ se obtivermos $(1,2)$ ou $(2,1)$ como resultados. Diremos, neste caso, que $P(S = 3) = 2/36$.

Da mesma forma, $U = 3$ sempre que o resultado for $(1,3), (3,1), (2,3), (3,2)$ ou $(3,3)$, de modo que $P(U = 3) = 5/36$.

Vemos assim que X_1, X_2, S e U assumem valores distintos com diferentes probabilidades e, por essa razão, serão chamadas de ***variáveis aleatórias***.

É importante observar que a cada valor assumido pela variável aleatória existem diversos resultados associados, formando um evento. Assim $X_1 = 2$ representa o evento onde o primeiro lançamento foi igual a 1. Ou seja,

$$\{X_1 = 2\} = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}.$$

Do mesmo modo podemos dizer que

$$\{X_2 = 4\} = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\},$$

$$\{S \geq 10\} = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

ou

$$\{U < 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 2)\}.$$

Olhando de maneira um pouco mais cuidadosa para os exemplos anteriores vemos que o que cada variável aleatória definida anteriormente está fazendo é *associar a cada resultado do espaço amostral um valor real*.

Por exemplo, X_1 associa ao resultado $(2, 6)$ o valor 2, e ao resultado $(4, 3)$ o número 4. Podemos então ver X_1 como uma *função* que associa cada elemento de S um número real.

Deste modo teríamos $X_1(2, 6) = 2$, enquanto $X_1(3, 1) = 3$.

Desta forma, podemos escrever os eventos associados à X_1 , por exemplo, como

$$\{X_1 = 3\} = \{\omega \in S : X_1(\omega) = 3\}$$

ou ainda

$$\{X_1 > 3\} = \{\omega \in S : X_1(\omega) > 3\}.$$

Em geral, para $A \subset \mathbb{R}$, escrevemos

$$\{X_1 \in A\} = \{\omega \in S : X_1(\omega) \in A\}$$

Definição 1 (Variável Aleatória)

Dado um experimento aleatório com espaço amostral S , uma *variável aleatória* X é uma função

$$X: S \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada resultado $\omega \in S$ um valor real $X(\omega)$.

Observação 1

Notação: costumamos representar variáveis aleatórias por letras maiúsculas, como X , Y , Z , T , etc.

Observação 2

Notação: Frequentemente escreveremos o nome *variável aleatória* simplesmente como v.a..

Considere o experimento de lançar 3 moedas não viciadas. Seja N o total de caras encontradas. Calcule $P(N = k)$ para cada $k = 0, 1, 2, 3$.

Solução: O espaço amostral deste experimento é dado por

$$S = \{(m_1, m_2, m_3) : m_i \in \{\text{cara}, \text{coroa}\}, i = 1, 2, 3\},$$

e portanto $|S| = 8$ (você entende porque?).

Vamos agora entender os eventos que nos interessam.

O evento $\{N = 0\}$ ocorre quando não lançamos nenhuma cara. Ou seja

$$\{N = 0\} = \{(\text{coroa}, \text{coroa}, \text{coroa})\}.$$

Do mesmo modo temos

$$\{N = 1\} = \{(\text{cara}, \text{coroa}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{cara})\}$$

$$\{N = 2\} = \{(\text{cara}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{cara})\}$$

$$\{N = 3\} = \{(\text{cara}, \text{cara}, \text{cara})\}.$$

Com isso, como $|S| = 8$ e o espaço é equiprovável, então

$$P(N = 0) = \frac{1}{8};$$

$$P(N = 1) = \frac{3}{8};$$

$$P(N = 2) = \frac{3}{8};$$

$$P(N = 3) = \frac{1}{8}.$$

Considere o experimento de escolher ao acaso um ponto em um círculo S de raio 1. Seja R a distância do ponto escolhido ao centro da circunferência. Suponha que a probabilidade do ponto observado estar em uma região $K \subset S$ do círculo é dada por

$$P(K) = \frac{\text{Área}(K)}{\text{Área}(S)} = \frac{\text{Área}(K)}{\pi}.$$

Encontre $P(R \leq r)$ para $r \in [0, 1]$.

Solução:

Primeiro observe que o espaço amostral é dado pela circunferência S de raio 1, e que para $r \in [0, 1]$ o evento $\{R \leq r\}$ é dado pelo círculo K_r de raio r , e portanto

$$P(R \leq r) = \frac{\text{Área}(K_r)}{\pi} = \frac{\pi r^2}{\pi} = r^2,$$

e portanto $P(R \leq r) = r^2$.

figuras/AlvoCircular.pdf

Figura: Ilustração do problema anterior. A variável R assumirá um valor menor ou igual à r sempre que sortearmos um ponto dentro da região K_r

Considere o experimento aleatório de lançar um dado não-viciado. Repetições independentes deste experimento são realizadas até que o número 6 seja observado pela primeira vez. Chame de X o total de lançamentos realizados, e calcule $P(X = k)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$

Solução: Considere o eventos $A_k = \{\text{o } k\text{-ésimo lançamento foi diferente de 6}\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, e note que por hipótese do problema, $A_1, A_2, A_3, \dots$ são independentes.

Além disso, temos que

$$\{N = 1\} = A_1^c;$$

$$\{N = 2\} = A_1 \cap A_2^c;$$

$$\{N = 3\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c;$$

$$\{N = 4\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c;$$

$$\vdots$$

$$\{N = k\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_k^c.$$

Segue assim que

$$P(N=1) = P(A_1^c) = \frac{1}{6};$$

$$P(N=2) = P(A_1 \cap A_2^c) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6};$$

$$P(N=3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6};$$

$$P(N=4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}.$$

E portanto, para $k = 1, 2, 3, \dots$, temos que

$$P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Para simplificar o estudo, variáveis aleatórias são primariamente classificadas em dois grandes grupos.

- 1 **Variáveis Aleatórias Discretas:** são variáveis que assumem valores em um conjunto finito ou *enumerável*. Ou seja, X é uma v.a. discreta se o conjunto de valores assumidos por X pode ser enumerado como $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.
- 2 **Variáveis Aleatórias Contínuas:** estas variáveis, ao contrário das discretas, assumem quaisquer valores em um intervalo dos reais. Ou seja, se X é uma v.a. contínua, então o conjunto de valores assumidos por X é do tipo $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ e similares. Além disso não podem existir valores $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(X = a) > 0$ (esta condição ficará mais clara no módulo sobre v.a.'s contínuas).

Observação 3

Esta definição de variáveis aleatórias contínuas não está completa, mas será o suficiente para os propósitos deste módulo. Teremos um módulo dedicado apenas às variáveis aleatórias contínuas, onde esses conceitos serão expostos de maneira mais precisa.

- Quando lançamos uma moeda n vezes, a variável N que conta o total de vezes que observamos coroa, é uma v.a. discreta;
- No experimento de monitorar todas as solicitações de chamadas que passam por uma torre de celular, a variável X que conta o total de chamadas que foram completadas é uma v.a. discreta;
- Repetimos um certo experimento até um evento A seja observado. A variável Z que conta quantas realizações foram realizadas é uma v.a. discreta.
- Lançamos um dado 5 vezes. Se Y é a soma dos resultados obtidos, então Y é uma v.a discreta.

- Considere o experimento de ligar uma lâmpada e esperar que ela apague sozinha. A variável T que mede o tempo de vida da lâmpada é uma v.a. contínua;
- Lançamos um dardo em um alvo circular. A variável R que mede a distância do dardo ao centro do alvo é uma v.a. contínua;
- Lançamos uma vareta em um chão de madeira com tábuas longas e finas, montadas paralelamente uma a outra. A variável Z que mede o ângulo entre a vareta e a direção das tábuas, é uma v.a. contínua.

Observação 4

Nem toda variável aleatória pode ser classificada como discreta ou contínua. Algumas são de fato uma combinação destes dois tipos. No entanto, grande parte das variáveis que aparecem em aplicações práticas, ou podem ser classificadas desta forma, ou são uma combinação das duas.

Exercício

Considere o experimento de lançar uma moeda não-viciada. Defina por M a variável aleatória que assume 1 se o lançamento foi cara e 0 se o lançamento foi coroa.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ encontre $P(M \leq x)$, e desenhe o gráfico da função $F(x)$ dada por $F(x) = P(M \leq x)$.

O que acontece com a função nos pontos $x = 0$ e $x = 1$?