

Distribuição de Variáveis Aleatórias

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada, deixando para os textos e vídeos os detalhes teóricos e exemplos mais elaborados.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos e ver os vídeos indicados no site do curso no Moodle, além da referência principal do curso.

Comecemos com um exemplo...

Considere o experimento de jogar duas moedas não-viciadas, e tome N como o número de caras observadas.

Calcule $P(N \leq x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$?

Vamos tentar... Para isso note que N pode assumir os valores 0, 1 ou 2. E além disso

$$P(N = 0) = P(\{(coroa, coroa)\}) = \frac{1}{4},$$

$$P(N = 1) = P(\{(cara, coroa), (coroa, cara)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

e

$$P(N = 2) = P(\{(cara, cara)\}) = \frac{1}{4}.$$

Vamos agora calcular o que ele pede...

Tome, por exemplo, o evento $\{N \leq \frac{3}{2}\}$. Existem apenas dois valores menores ou iguais a $3/2$ que N pode assumir, que são o 0 e o 1. Deste modo

$$P\left(N \leq \frac{3}{2}\right) = P(N=0) + P(N=1) = \frac{3}{4}.$$

Do mesmo modo

$$P(N \leq 0) = P(N=0) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(N \leq 3) = P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) = 1.$$

Usando esta mesma ideia podemos calcular $P(N \leq x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, encontramos

$$P(N \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } x < 0; \\ \frac{1}{4} & , \text{ para } 0 \leq x < 1; \\ \frac{3}{4} & , \text{ para } 1 \leq x < 2; \\ 1 & , \text{ para } x \geq 2; \end{cases}$$

A função $F_N(x) := P(N \leq x)$ calculada acima é conhecida como **função distribuição acumulada** da variável aleatória N .

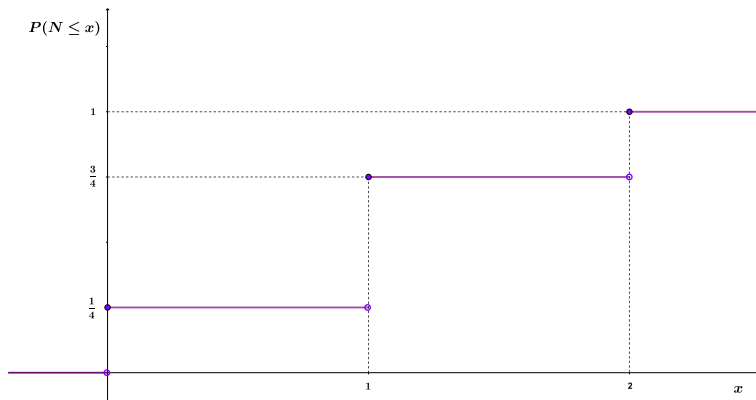


Figura: Gráfico de $F_N(x)$, a função distribuição acumulada de N

Definição 1 (Função Distribuição Acumulada)

Dada uma variável aleatória X , a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$F_X(x) := P(X \leq x),$$

é chamada de **função distribuição acumulada** de X , ou simplesmente **função distribuição** de X .

Definição 2

Diremos que duas v.a.'s X e Y são **identicamente distribuídas** se X e Y possuem a mesma função distribuição acumulada. Ou seja, se $F_X(x) = F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sorteamos 3 cartas de um baralho regular de 52 cartas. Seja V o total de cartas vermelhas e N o total de cartas pretas sorteadas.

Solução: Como o experimento consiste em sortear 3 cartas em 52 disponíveis, o espaço amostral S é formado por todos os grupos de 3 cartas do baralho, e

$$|S| = \binom{52}{3} = 22100.$$

Lembremos agora que em um baralho de 52 cartas, metade são vermelhas e a outra metade pretas. Assim, os eventos $\{V = 0\}$ e $\{N = 3\}$ consistem dos grupos de 3 cartas pretas. O que nos dá

$$|\{V = 0\}| = |\{N = 3\}| = \binom{26}{3} = 2600,$$

e do mesmo modo

$$|\{V = 3\}| = |\{N = 0\}| = \binom{26}{3} = 2600.$$

Segue assim que

$$P(V=0) = P(N=0) = P(V=3) = P(N=3) = \frac{2600}{22100} = \frac{2}{17}.$$

Um raciocínio análogo nos leva à

$$P(V=1) = P(N=2) = P(V=2) = P(N=1) = \frac{\binom{26}{1}\binom{26}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{13}{34}.$$

Calculando as funções de distribuição acumulada de V e N encontramos

$$F_V(x) = F_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \frac{2}{17} & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ \frac{15}{17} & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{se } x \geq 3; \end{cases}$$

De onde concluímos que V e N são identicamente distribuídas.

Lançamos uma moeda ao acaso em um chão quadriculado, coberto por azulejos de 20 cm de lado. Seja D a distância do centro da moeda para a borda de azulejo mais próxima. Encontre a função distribuição de D .

Solução: Como a moeda certamente cai dentro de algum azulejo, podemos considerar o nosso espaço amostral S como sendo um quadrado de lado 20.

Como já fizemos outras vezes, o fato da moeda cair ao acaso dentro do azulejo, nos diz que a probabilidade da moeda cair em uma região $R \subset S$ é dada por

$$P(R) = \frac{\text{Área}(R)}{\text{Área}(S)} = \frac{\text{Área}(R)}{400}.$$

Como o quadrado tem lado 20, a distância D do centro da moeda ao lado mais próximo do azulejo deve estar entre 0 e 10. Com isso temos que

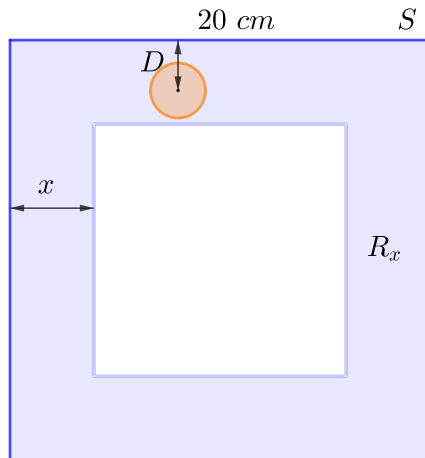
$$P(D \leq x) = 0 \quad \text{para } x < 0,$$

e

$$P(D \leq x) = 1 \quad \text{para } x \geq 10,$$

Exemplos

Para $0 \leq x < 10$, considere a região R_x ilustrada abaixo.



Como vemos, o centro da moeda estará a uma distância menor que x da borda do azulejo se seu centro cair dentro da região R_x .

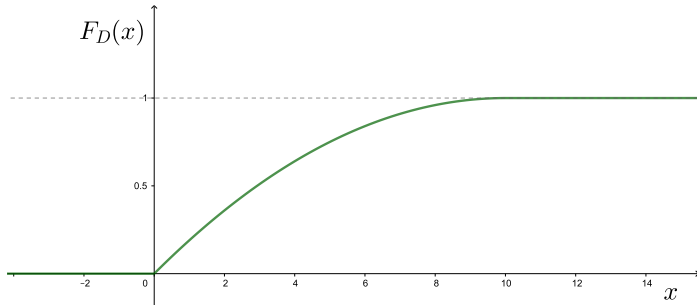
Exemplos

Assim, para $0 \leq x < 10$ temos

$$P(D \leq x) = P(R_x) = \frac{400 - (20 - 2x)^2}{400} = \frac{20x - x^2}{100},$$

e $F_D(x) = P(D \leq x)$ é dada por

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \frac{20x - x^2}{100} & \text{se } 0 \leq x < 10; \\ 1 & \text{se } x \geq 10; \end{cases}$$



Funções distribuições acumuladas, independente das variáveis aleatórias associadas a elas, compartilham uma série de propriedades. As demonstrações de algumas delas estão além do escopo deste curso, mas comentaremos as mais simples.

Propriedades

Se $F_X(x)$ é a função distribuição acumulada de uma v.a. X , então vale que:

- ❶ $F_X(x)$ é não-decrescente. Ou seja, se $a < b$, então $F_X(a) \leq F_X(b)$;
- ❷ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;
- ❸ Se $F_X(x)$ tem uma descontinuidade em $x = a$, então o tamanho do salto é igual à $P(X = a)$;
- ❹ $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.

- 1 Note que se $a < b$, então $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$, e portanto

$$F_X(a) = P(X \leq a) \leq P(X \leq b) = F_X(b);$$

- 2 Se $a < b$ então podemos escrever

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}.$$

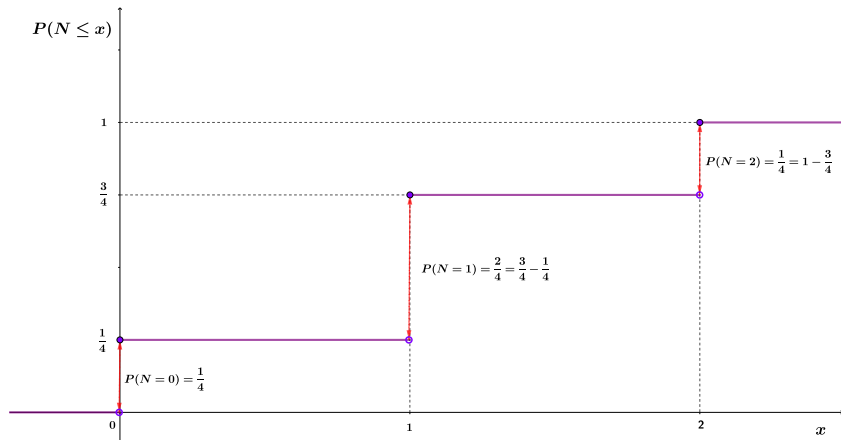
Além disso, os eventos $\{X \leq a\}$ e $\{a < X \leq b\}$ são mutuamente exclusivos.
Segue que

$$F_X(b) = P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) = F_X(a) + P(a < X \leq b),$$

$$\text{e portanto } P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

As demonstrações das próximas propriedades estão além do escopo deste curso, mas comentaremos rapidamente cada uma delas.

- 8 Como vimos, $P(X \leq x)$ cresce a medida que o valor de x aumenta. Mas esse crescimento, em geral, é contínuo, e só dá um salto em $x = a$ quando $P(X = a) > 0$. Neste caso, o tamanho do salto deve ser exatamente $P(x = a)$. Isso pode ser visto no exemplo inicial, onde N representava o total de caras no lançamento de 3 moedas. Veja a imagem abaixo:



- Estes limites saem ao mostrarmos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(X \leq x) = P(X < \infty) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = P(X \leq -\infty) = 0.$$

Seja X uma variável aleatória com função distribuição acumulada dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \frac{x}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ \frac{2}{3} & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ \frac{11}{12} & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{se } x \geq 3; \end{cases}$$

- a Identifique os valores $a \in \mathbb{R}$ tais que $P(X = a) > 0$ e calcule essas probabilidades;
- b Calcule $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$;
- c Calcule $P(X < 3)$;
- d Calcule $P(1 \leq X < 2)$;
- e Calcule $P\left(X > \frac{5}{4}\right)$.

- 8 Identifique os valores $a \in \mathbb{R}$ tais que $P(X = a) > 0$ e calcule essas probabilidades;

Existem 4 pontos na função onde alguma descontinuidade pode ocorrer, que são $x = 0, x = 1, x = 2$ e $x = 3$.

Em $x = 0$ temos $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, de modo que $x = 0$ é ponto de continuidade.

Em $x = 1$ temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \frac{2}{3}.$$

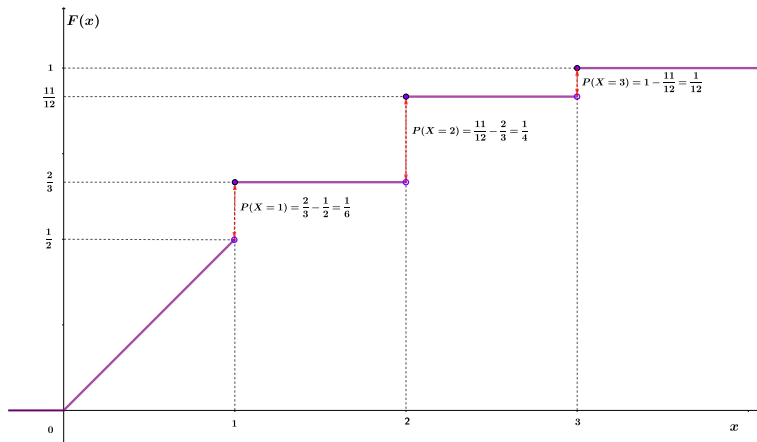
Assim, o tamanho do salto em $x = 1$ é igual a $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, e portanto

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

Exemplo

Da mesma forma, o salto em $x = 2$ é igual a $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, enquanto em $x = 3$ o salto é de $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$. Segue que

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(X=3) = \frac{1}{12}.$$



- b Calcule $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$.

Pela propriedade 2,

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right) = F(2) - F(1/2) = \frac{11}{12} - \frac{1/2}{2} = \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

- c Calcule $P(X < 3)$.

Note que $P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X = 3)$, e portanto, pelo item (a), temos

$$P(X < 3) = P(X \leq 3) - P(X = 3) = F(3) - \frac{1}{12} = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}.$$

- d Calcule $P(1 \leq X < 2)$;

Primeiro note que $P(1 < X \leq 2) = P(1 < X < 2) + P(X = 2)$, de modo que

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= P(1 < X \leq 2) - P(X = 2) \\ &= F(2) - F(1) - P(X = 2) \\ &= \frac{11}{12} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

E portanto

$$P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) + P(1 < X < 2) = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}.$$

- e Calcule $P(X > \frac{5}{4})$.

Basta observar que

$$P\left(X > \frac{5}{4}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{5}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nestes slides vimos diversos exemplos de funções distribuição acumulada. Você conseguiria descrever alguma propriedade ou forma que a função distribuição de qualquer v.a. discreta deve ter?