

Variáveis Aleatórias Discretas

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada, deixando para os textos e vídeos os detalhes teóricos e exemplos mais elaborados.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos e ver os vídeos indicados no site do curso no Moodle, além da referência principal do curso.

São variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto finito ou *enumerável*.

Em outras palavras, X é uma v.a. discreta se o conjunto de valores assumidos por X pode ser enumerado como $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Alguns exemplos de variáveis discretas são:

- O número de lançamentos de um dado honesto sobre uma superfície plana que devem ser realizados até que um número menor que 4 seja observado na face superior;
- O número de filhas de uma família escolhida ao acaso na cidade de Santo André para a realização de uma pesquisa;
- O número de dias com chuva na cidade de São Bernardo em um período de um ano.

Se X é uma v.a. discreta tomando valores no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ou no conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ então:

$$\{X = x_i\}$$

para cada $i = 1, 2, \dots$ é um evento. De fato, lembre que

$$\{X = x_i\} = \{\omega \in \mathcal{S} : X(\omega) = x_i\}.$$

Portanto podemos calcular sua probabilidade:

$$P(X = x_i)$$

e esta probabilidade é denotada por $p(x_i)$.

Realize o lançamento de uma moeda viciada que tem probabilidade $3/4$ de dar cara. Se definimos a variável aleatória X como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{quando o resultado é cara,} \\ 0 & \text{quando o resultado é corõa.} \end{cases}$$

então sua função de probabilidade é dada por:

$$p(1) = P(X = 1) = \frac{3}{4} \text{ e } p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}.$$

Observação 1

Dado um evento qualquer A , uma variável aleatória I_A definida como

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } A \text{ ocorrer,} \\ 0 & \text{se o evento } A^c \text{ ocorrer,} \end{cases}$$

chama-se variável aleatória indicadora do evento A . Como no exemplo,

$$P(I_A = 1) = P(A) \quad \text{e} \quad P(I_A = 0) = P(A^c) = 1 - P(A).$$

Definição 1

Se X é uma variável aleatória discreta definimos a função de probabilidade $p(a)$ de X como $p(a) = P(X = a)$.

Observação 2

$p(a)$ é positiva para no máximo um número contável de valores de a . De fato se X toma valores no conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ então

$$\begin{aligned} p(x_i) &= P(X = x_i) \geq 0, & \text{para } i = 1, 2, \dots \\ p(a) &= P(X = a) = 0, & \text{para todo } a \neq x_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

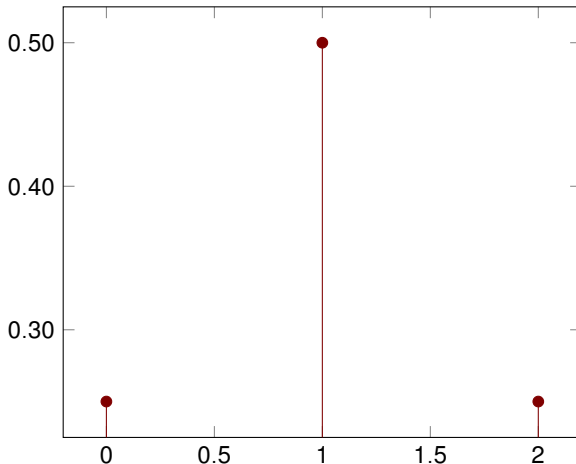
Observação 3

Sempre vale que $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$. De fato, se X toma valores em $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

$$\text{Como } \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\} = S \text{ então } 1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i).$$

Representação

A função de probabilidade é representada em um gráfico desenhando $p(x_i)$ no eixo y em função de x_i no eixo x . Por exemplo, se X tem função de probabilidade dada por $p(0) = 0,25$, $p(1) = 0,5$ e $p(2) = 0,25$ então:



Exemplo

Uma loja online distribui 10 tipos distintos de cupons de desconto para seus clientes. Uma pessoa, tentando conseguir descontos em alguns itens específicos, começa a recolher cupons com amigos e conhecidos, até conseguir cupons dos tipos 1 ou 3. Suponha que, independentemente dos tipos já recolhidos, cada novo cupom obtido tenha a mesma probabilidade de ser de qualquer tipo. Se X denota o número de cupons recolhidos, determine a função de probabilidade de X .

Solução. Note que X toma valores no conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$. Por outro lado, para cada i considere o evento

$A_i =$ no i -ésimo recolhimento é obtido um cupom de tipo 1 ou um de tipo 3.

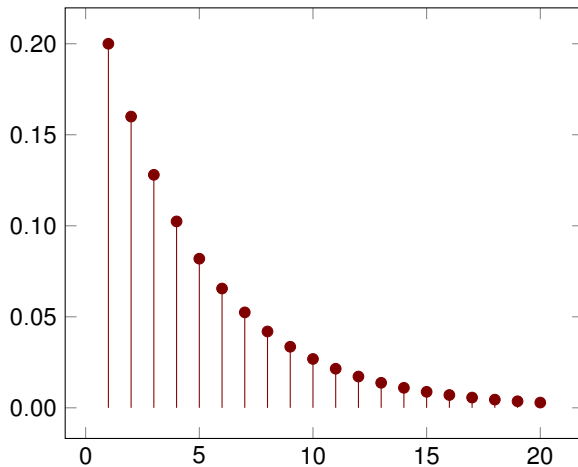
Note que, para cada $i = 1, 2, \dots$ vale que $P(A_i) = 2/10 = 1/5$ e que os eventos A_i são independentes entre si. Como $\{X = i\} = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$ então

$$P(X = i) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c \cap A_i) = P(A_1^c) \times P(A_2^c) \times \dots \times P(A_{i-1}^c) \times P(A_i)$$

e portanto

$$p(i) = \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \dots \times \left(\frac{4}{5}\right)}_{i-1 \text{ vezes}} \times \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{5}\right).$$

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



Exemplo

A função de probabilidade de uma variável aleatória X é dada por

$$p(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \dots$$

onde λ é algum valor positivo. Determine (a) $P(X = 0)$ e (b) $P(X > 2)$.

Solução: Para (a) note que $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$.

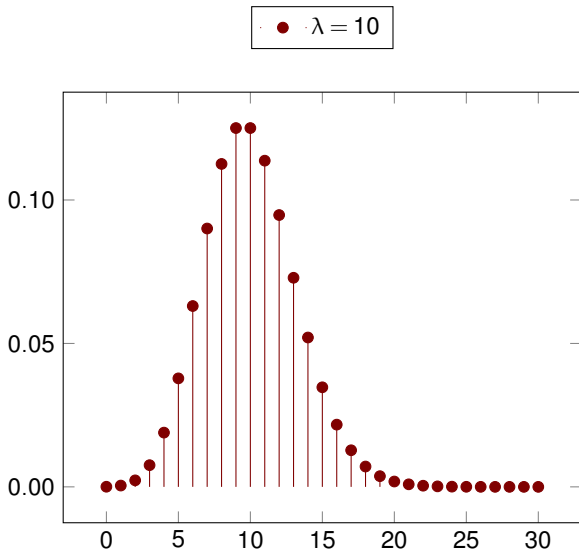
Para (b) note que $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$ e como

$$\{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\},$$

$$\begin{aligned} \text{temos que } P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda + \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } P(X > 2) = 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right).$$

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



A função de distribuição F de uma variável aleatória discreta X pode ser escrita em termos de $p(a)$:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{\text{todo } x \leq a} p(x).$$

Se X é discreta com possíveis valores $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, com $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, então F de X é uma função *degrau* ou *escada*.

Isto é, a função F é constante em intervalos $[x_{i-1}, x_i)$ e então dá um salto de tamanho $p(x_i)$ em x_i .

Se X tem função de probabilidade dada por

$$p(1) = 0,25 \quad p(2) = 0,5 \quad p(3) = 0,25$$

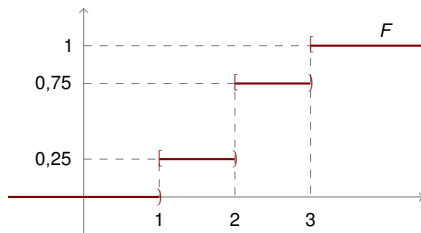
então sua função de distribuição é dada por:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1 \\ 0,25 & \text{se } 1 \leq a < 2 \\ 0,75 & \text{se } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{se } a \geq 3. \end{cases}$$

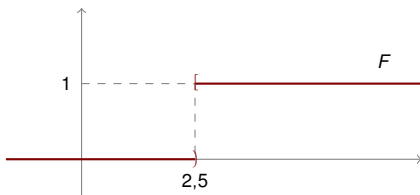
Solução. Com efeito, note que X toma valores no conjunto $\{1,2,3\}$. Logo,

- Se $a < 1$ então $P(X \leq a) = P(\emptyset) = 0$,
- Se $1 \leq a < 2$ então $P(X \leq a) = p(1) = 0,25$,
- Se $2 \leq a < 3$ então $P(X \leq a) = p(1) + p(2) = 0,75$,
- Se $a \geq 3$ então $F(a) = P(X \leq a) = P(S) = 1$.

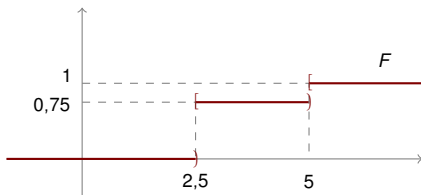
$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1 \\ 0,25 & \text{se } 1 \leq a < 2 \\ 0,75 & \text{se } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{se } a \geq 3. \end{cases}$$



Note que a partir de $F(a)$ podemos descobrir $p(a)$!



Neste caso $P(X = 2,5) = 1$.



Neste caso $P(X = 2,5) = 0,75$ e
 $P(X = 5) = 0,25$.

Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição dada por:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq a < 2,5 \\ 0,5 & \text{se } 2,5 \leq a < 3 \\ 0,9 & \text{se } 3 \leq a < 5 \\ 1 & \text{se } a \geq 5. \end{cases}$$

Encontre $p(a)$ de X e calcule $P(2 \leq X \leq 4)$ e $P(X > 1,5)$.

Solução. Note que F dá saltos em 0, em 2,5, em 3 e em 5. Logo, X toma esses possíveis valores com probabilidades dadas pelo tamanho do salto da função F em cada valor. Isto é:

$$p(0) = 0,25 \quad p(2,5) = 0,25 \quad p(3) = 0,4 \quad p(5) = 0,1.$$

Agora, note que $P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2,5) + P(X = 3) = 0,25 + 0,4 = 0,65$, enquanto que $P(X > 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - 0,25 = 0,75$.