

Variáveis Aleatórias Discretas

Prof. Alejandra, Cristian, Paula e Rafael

Introdução à Probabilidade e Estatística



Estes slides tem por objetivo apenas complementar e esclarecer os textos principais indicados para a disciplina, e não devem ser usados como único texto de referência.

Eles tratam apenas dos principais aspectos da teoria abordada, deixando para os textos e vídeos os detalhes teóricos e exemplos mais elaborados.

Junto à essas notas o aluno deve ler os textos e ver os vídeos indicados no site do curso no Moodle, além da referência principal do curso.

Começemos com um exemplo...

Um programa de auditório faz certo um jogo com membros da plateia onde cada vencedor ganha um total de R\$1.000,00 caso vençam, e R\$50,00 como prêmio de consolação, caso percam. A organização do programa sabe que cada participante tem uma probabilidade de $1/10$ de ganhar o jogo, que é repetido semanalmente com dezenas de participantes a cada semana. Qual o gasto médio **por participante** que a produção tem com esse jogo?

Solução: Resgatando a ideia de probabilidade como frequência podemos pensar que $1/10$ dos participantes ganham o jogo, ganhando 1000 reais cada um. Do mesmo modo, $9/10$ dos participantes perdem e levam 50 reais. Com isso, o gasto médio por participante deve ser de

$$m \approx 1000 \cdot \frac{1}{10} + 50 \cdot \frac{9}{10} = 145.$$

Voltando a probabilidade, se considerarmos o experimento de jogar um partida deste jogo, e N for o total ganho pelo participante teríamos

$$m \approx 1000 \cdot P(N = 1000) + 50 \cdot P(N = 50).$$

Esta quantidade, que mede uma espécie de *comportamento médio* da variável N é conhecida como **esperança** N e é o tema destas notas.

Se X é uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$ então a esperança de X , denotada por $E[X]$, é definida por

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} x p(x).$$

Observação 1

Interpretação: A esperança, também chamada de valor esperado ou média de X , é uma média ponderada dos possíveis valores que X pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que X seja igual a esse valor.

Deste modo é uma espécie de *ponto de equilíbrio*, em torno do qual valores de X se distribuem. Por essa razão é também conhecida como uma das medidas de *posição* da distribuição de X .

- Se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(1) = p(3) = \frac{1}{2}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+3}{2} = 2$$

é a média ordinária dos dois valores possíveis que X pode assumir.

- Por outro lado, se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(1) = \frac{1}{3} \quad p(3) = \frac{2}{3}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1+2 \cdot 3}{3} = \frac{7}{2}$$

é uma média ponderada dos dois valores possíveis, 1 e 3, onde ao valor 3 se dá duas vezes mais peso do que ao valor 1, já que $p(3) = 2p(1)$.

Determine $E[X]$, onde X é o resultado que obtemos quando rolamos um dado honesto.

Solução. Como o dado é honesto e X toma valores em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ então

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

e portanto

$$E[X] = 1 \left(\frac{1}{6} \right) + 2 \left(\frac{1}{6} \right) + 3 \left(\frac{1}{6} \right) + 4 \left(\frac{1}{6} \right) + 5 \left(\frac{1}{6} \right) + 6 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{7}{2}$$

Lembre que dado um evento qualquer A , a variável aleatória indicadora de A é a variável aleatória I_A definida como

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } A \text{ ocorrer,} \\ 0 & \text{se o evento } A^c \text{ ocorrer.} \end{cases}$$

Neste caso,

$$E[I_A] = 0 \cdot P(I = 0) + 1 \cdot P(I = 1) = 0 \cdot P(A^c) + 1 \cdot P(A) = P(A).$$

Isto é, a esperança da variável aleatória indicadora de A é a probabilidade de ocorrência do evento A !

Uma turma com 120 estudantes é levada em 3 ônibus para a apresentação de uma orquestra sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 no outro e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 estudantes é escolhido aleatoriamente. Suponha que X represente o número de estudantes que vieram no mesmo ônibus do estudante escolhido e determine $E[X]$.

Solução. Como o estudante escolhido aleatoriamente pode ser, com mesma probabilidade, qualquer um dos 120 estudantes, temos que

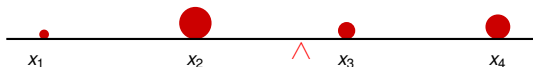
$$P(X = 36) = \frac{36}{120} \quad P(X = 40) = \frac{40}{120} \quad P(X = 44) = \frac{44}{120}.$$

Então,

$$E[X] = 36 \left(\frac{36}{120} \right) + 40 \left(\frac{40}{120} \right) + 44 \left(\frac{44}{120} \right) = \frac{1208}{30} = 40,2667.$$

Esperança como centro de gravidade

O conceito de esperança é análogo ao conceito de centro de gravidade de uma distribuição de massas. Antes de passar à essa analogia, vamos lembrar o que é o centro de gravidade. Para isso tome uma barra numerada sem massa e apoie sobre ela uma série de pesos. Para o peso localizado na posição x_i diremos que a massa é $p(x_i)$, como na figura abaixo.



O centro de gravidade será o “ponto de equilíbrio” deste sistema de pesos. Mais precisamente, é o local onde o torque resultante é zero. Para os pesos acima, se g é a aceleração da gravidade, então o centro de gravidade está no ponto c onde

$$g \cdot p(x_1) \cdot (x_1 - c) + g \cdot p(x_2) \cdot (x_2 - c) + g \cdot p(x_3) \cdot (x_3 - c) + g \cdot p(x_4) \cdot (x_4 - c) = 0.$$

Se considerarmos, por simplicidade, que $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = 1$, então

$$c = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + x_4 \cdot p(x_4)$$

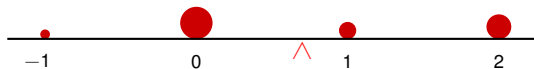
Esperança como centro de gravidade

Voltando à analogia, considere uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i \geq 1$. Imagine também uma haste sem peso na qual pesos com massa $p(x_i)$, $i \geq 1$, estejam localizados nos pontos x_i , $i \geq 1$. Assim temos que o centro de gravidade c da haste é dada por

$$c = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = E[X].$$

Se, por exemplo, os pesos da figura abaixo tem massas

$$p(-1) = 0,1, \quad p(0) = 0,4, \quad p(1) = 0,2 \quad \text{e} \quad p(2) = 0,3,$$



o centro de gravidade será dado por:

$$\wedge = (-1) \times 0,1 + 0 \times 0,4 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 = 0,7.$$

Suponha que X é uma variável aleatória com função de probabilidade:

$$P(X = -1) = 0,2 \quad P(X = 0) = 0,5 \quad P(X = 1) = 0,3.$$

Calcule $E[X^2]$.

Solução. Note que o problema é calcular a esperança de uma função de uma variável aleatória. Como $Y = X^2$ é também uma variável aleatória, uma forma de fazer isto é encontrando sua função de probabilidade. Isto é:

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,5$$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0,5.$$

Logo,

$$E[X^2] = E[Y] = 0 P(Y = 0) + 1 P(Y = 1) = 0 \times (0,5) + 1 \times (0,5) = 0,5.$$

Teorema 1

Seja X uma variável aleatória discreta com possíveis valores x_i , $i \geq 1$ e função de probabilidade $p(a)$. Então, para qualquer função real g ,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

... voltando ao exemplo anterior, note que agora pelo teorema:

$$E[X^2] = (-1)^2 \times (0,2) + 0^2 \times (0,5) + 1^2 \times (0,3) = 1 \times (0,2 + 0,3) + 0 \times (0,5) = 0,5.$$

Demonstração.

A ideia é agrupar aqueles valores nos quais os $g(x_i)$ são iguais:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p(x_i) &= \sum_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i) p(x_i) \right\} \\&= \sum_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} y_j p(x_i) \right\} \\&= \sum_j y_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} p(x_i) \right\} \\&= \sum_j y_j P(g(X) = y_j) \\&= E[g(X)].\end{aligned}$$



Uma propriedade importante é a seguinte: Se a e b são constantes, então

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{x:p(x)>0} (ax + b)p(x) \\ &= a \sum_{x:p(x)>0} xp(x) + b \sum_{x:p(x)>0} p(x) \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$

Para uma variável aleatória discreta X , o valor esperado $E[X]$ dá uma média ponderada dos valores possíveis de X mas não diz nada sobre a variação destes valores.

Por exemplos as v.a. W , Y e Z com funções de probabilidade dadas por:

$$P(W = 0) = 1,$$

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z = 100) = P(Z = -100) = \frac{1}{2}$$

são tais que $E[W] = E[Y] = E[Z] = 0$, porém a variação dos seus possíveis valores é bem diferente.

Uma forma de representar estas variações é através da variância!

Definição 2

Se X é uma variável aleatória com média $\mu = E[X]$, então a variância de X , representada por $Var[X]$, é definida como

$$Var[X] = E \left[(X - \mu)^2 \right].$$

Observação 2

Interpretação: Note que $Var[X]$ está nos dizendo quão distante está X , em média, da sua esperança μ .

Observação 3

Uma fórmula muito útil para a variância de uma variável aleatória X é:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[(X - \mu)^2] \\&= \sum_x (x - \mu)^2 p(x) \\&= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) \\&= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\&= E[X^2] - \mu^2.\end{aligned}$$

Calcule $\text{Var}[X]$ para a variável aleatória X que representa o resultado de um dado honesto.

Solução. Sabemos que $E[X] = 7/2$. Por outro lado,

$$E[X^2] = 1^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 3^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 4^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 5^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 6^2 \left(\frac{1}{6}\right) = 91 \left(\frac{1}{6}\right).$$

Então,

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Vale a seguinte propriedade: Se a e b são constantes, então

$$\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X].$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}\text{Var}[aX + b] &= E[(\{aX + b\} - \{a\mu + b\})^2] \\&= E[(aX + b - a\mu - b)^2] \\&= E[a^2(X - \mu)^2] \\&= a^2 E[(X - \mu)^2] \\&= a^2 \text{Var}[X].\end{aligned}$$

Lançamos uma moeda viciada 3 vezes. Seja N a quantidade de caras observadas. Considerando que a probabilidade de observar cara em um lançamento é igual a p , e que os resultados dos lançamentos são independentes entre si, encontre o valor esperado e a variância de N .