Gabarito da Avaliação P1 (Tema A)

Funções de Uma Variável (FUV) – 3º Quadrimestre de 2026

Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Universidade Federal do ABC

Novembro de 2026

Estrutura da Avaliação

1. Questão 1: Derivada pela Definição, Diferenciabilidade e Teorema de Rolle
2. Questão 2: Monotonia, Função Inversa e Derivação Implícita
3. Questão 3: Otimização Geométrica do Silo de Grãos
4. Questão 4: Análise Qualitativa e Esboço Completo de Gráfico
5. Questão 5 (Bônus): Assíntotas e Polinômio de Taylor com Resto

Questão 1(a) – Enunciado e Estratégia de Resolução

Enunciado – Item (a) [1,0 ponto]

Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 g(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|g(x)| \leq \cos^2((x+1)^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule a derivada de f em $x = 0$ pela definição.

Questão 1(a) – Enunciado e Estratégia de Resolução

Enunciado – Item (a) [1,0 ponto]

Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 g(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|g(x)| \leq \cos^2((x+1)^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule a derivada de f em $x = 0$ pela definição.

Definição Formal da Derivada

A derivada de uma função f em $x_0 = 0$ é definida pelo limite da razão incremental:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Questão 1(a) – Enunciado e Estratégia de Resolução

Enunciado – Item (a) [1,0 ponto]

Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 g(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|g(x)| \leq \cos^2((x+1)^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule a derivada de f em $x = 0$ pela definição.

Definição Formal da Derivada

A derivada de uma função f em $x_0 = 0$ é definida pelo limite da razão incremental:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

- **Cálculo de $f(0)$:**

$$f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 \cdot g(0) = 0 \cdot g(0) = 0$$

Observação: Como $|g(0)| \leq \cos^2(1) \leq 1$, o número $g(0)$ é finito e bem definido.

Questão 1(a) – Análise da Razão Incremental

Montagem da Razão Incremental para $x \neq 0$

Substituindo $f(x)$ e $f(0) = 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{3}x^3 g(x) - 0}{x} = \frac{1}{3}x^2 g(x)$$

Questão 1(a) – Análise da Razão Incremental

Montagem da Razão Incremental para $x \neq 0$

Substituindo $f(x)$ e $f(0) = 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{3}x^3 g(x) - 0}{x} = \frac{1}{3}x^2 g(x)$$

Limitação da Função $g(x)$

A hipótese informa que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$|g(x)| \leq \cos^2((x+1)^4)$$

Como a função cosseno satisfaz $0 \leq \cos^2(\theta) \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos a cota uniforme:

$$|g(x)| \leq 1 \iff -1 \leq g(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Questão 1(a) – Aplicação do Teorema do Confronto

Desigualdade de Enquadramento

Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, multiplicamos a desigualdade $-1 \leq g(x) \leq 1$ por $\frac{1}{3}x^2$:

$$-\frac{1}{3}x^2 \;\leq\; \frac{1}{3}x^2 g(x) \;\leq\; \frac{1}{3}x^2$$

Questão 1(a) – Aplicação do Teorema do Confronto

Desigualdade de Enquadramento

Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, multiplicamos a desigualdade $-1 \leq g(x) \leq 1$ por $\frac{1}{3}x^2$:

$$-\frac{1}{3}x^2 \;\leq\; \frac{1}{3}x^2 g(x) \;\leq\; \frac{1}{3}x^2$$

Cálculo dos Limites Laterais dos Extremos

Calculando os limites quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}x^2\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right) = 0$$

Questão 1(a) – Aplicação do Teorema do Confronto

Desigualdade de Enquadramento

Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, multiplicamos a desigualdade $-1 \leq g(x) \leq 1$ por $\frac{1}{3}x^2$:

$$-\frac{1}{3}x^2 \;\leq\; \frac{1}{3}x^2 g(x) \;\leq\; \frac{1}{3}x^2$$

Cálculo dos Limites Laterais dos Extremos

Calculando os limites quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}x^2\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right) = 0$$

Conclusão pelo Teorema do Confronto (Sanduíche)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}x^2 g(x) = 0$$

Questão 1(b) – Enunciado e Condição de Continuidade

Enunciado – Item (b) [1,0 ponto]

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 3x - 1, & \text{se } x \leq 0 \\ b(x+2) + e^{2x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que f seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

Questão 1(b) – Enunciado e Condição de Continuidade

Enunciado – Item (b) [1,0 ponto]

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 3x - 1, & \text{se } x \leq 0 \\ b(x+2) + e^{2x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que f seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

- Para $x < 0$ e $x > 0$, as ramificações são combinações lineares de funções elementares deriváveis em seus domínios abertos.
- O único ponto crítico de análise é a transição em $x_0 = 0$.
- **Condição Necessária:** A derivabilidade em $x = 0$ exige que f seja **contínua** em $x = 0$.

Questão 1(b) – Impondo a Continuidade em $x = 0$

Limites Laterais e Valor no Ponto

Para haver continuidade em $x = 0$, devemos ter:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Questão 1(b) – Impondo a Continuidade em $x = 0$

Limites Laterais e Valor no Ponto

Para haver continuidade em $x = 0$, devemos ter:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

- **À esquerda e no ponto ($x \leq 0$):**

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = a\cos(0) + 3(0) - 1 = a(1) - 1 = a - 1$$

- **À direita ($x > 0$):**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[b(x+2) + e^{2x} \right] = b(0+2) + e^0 = 2b + 1$$

Questão 1(b) – Impondo a Continuidade em $x = 0$

Limites Laterais e Valor no Ponto

Para haver continuidade em $x = 0$, devemos ter:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

- **À esquerda e no ponto ($x \leq 0$):**

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = a\cos(0) + 3(0) - 1 = a(1) - 1 = a - 1$$

- **À direita ($x > 0$):**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[b(x+2) + e^{2x} \right] = b(0+2) + e^0 = 2b + 1$$

Primeira Equação Vinculada (Continuidade)

$$a - 1 = 2b + 1 \implies a - 2b = 2 \quad \textbf{(Equação 1)}$$

Questão 1(b) – Impondo a Diferenciabilidade em $x = 0$

Igualdade das Derivadas Laterais

Para que $f'(0)$ exista, as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ devem ser iguais.

Questão 1(b) – Impondo a Diferenciabilidade em $x = 0$

Igualdade das Derivadas Laterais

Para que $f'(0)$ exista, as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ devem ser iguais.

- **Derivada à esquerda ($f'_-(0)$):**

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\left[a\cos(x) + 3x - 1\right] = \lim_{x\to 0^-} \left[-a\sin(x) + 3\right] = -a\sin(0) + 3 = 3$$

- **Derivada à direita ($f'_+(0)$):**

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\left[b(x+2) + e^{2x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[b + 2e^{2x}\right] = b + 2e^0 = b + 2$$

Questão 1(b) – Impondo a Diferenciabilidade em $x = 0$

Igualdade das Derivadas Laterais

Para que $f'(0)$ exista, as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ devem ser iguais.

- **Derivada à esquerda ($f'_-(0)$):**

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\left[a\cos(x) + 3x - 1\right] = \lim_{x\to 0^-} \left[-a\sin(x) + 3\right] = -a\sin(0) + 3 = 3$$

- **Derivada à direita ($f'_+(0)$):**

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\left[b(x+2) + e^{2x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[b + 2e^{2x}\right] = b + 2e^0 = b + 2$$

Segunda Equação Vinculada (Derivabilidade)

$$f'_-(0) = f'_+(0) \implies 3 = b + 2 \implies b = 1$$

Questão 1(b) – Resolução do Sistema e Conclusão

Sistema Linear das Condições

$$\begin{cases} a - 2b = 2 & \text{(da continuidade)} \\ b = 1 & \text{(da derivabilidade)} \end{cases}$$

Questão 1(b) – Resolução do Sistema e Conclusão

Sistema Linear das Condições

$$\begin{cases} a - 2b = 2 & \text{(da continuidade)} \\ b = 1 & \text{(da derivabilidade)} \end{cases}$$

Substituição Direta

Substituindo $b = 1$ na primeira equação:

$$a - 2(1) = 2 \implies a - 2 = 2 \implies a = 4$$

Questão 1(b) – Resolução do Sistema e Conclusão

Sistema Linear das Condições

$$\begin{cases} a - 2b = 2 & \text{(da continuidade)} \\ b = 1 & \text{(da derivabilidade)} \end{cases}$$

Substituição Direta

Substituindo $b = 1$ na primeira equação:

$$a - 2(1) = 2 \implies a - 2 = 2 \implies a = 4$$

Solução Final do Item (b)

As constantes reais procuradas são:

$$\mathbf{a = 4} \quad \text{e} \quad \mathbf{b = 1}$$

Questão 1(c) – Teorema de Rolle: Enunciado e Hipóteses

Enunciado – Item (c) [1,0 ponto]

Aplique o Teorema de Rolle à função $f(x) = (x-1)\sin(x)$ em $[0,1]$ e conclua que a equação $\cot(x) = \dfrac{1}{1-x}$ tem ao menos uma solução em $(0,1)$.

Questão 1(c) – Teorema de Rolle: Enunciado e Hipóteses

Enunciado – Item (c) [1,0 ponto]

Aplique o Teorema de Rolle à função $f(x) = (x-1)\sin(x)$ em $[0,1]$ e conclua que a equação $\cot(x) = \dfrac{1}{1-x}$ tem ao menos uma solução em $(0,1)$.

Verificação Rigorosa das Hipóteses de Rolle em $[0,1]$

1. **Continuidade:** $f(x)$ é o produto de um polinômio $(x-1)$ e da função trigonométrica $\sin(x)$, ambas contínuas em toda a reta real $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0,1]$.
2. **Diferenciabilidade:** Como produto de funções infinitamente deriváveis, f é derivável em toda a reta $\mathbb{R}$ e, em particular, no intervalo aberto $(0,1)$.
3. **Igualdade nos Extremos:**

$$f(0) = (0-1)\sin(0) = (-1)\cdot 0 = 0$$

$$f(1) = (1-1)\sin(1) = 0 \cdot \sin(1) = 0 \implies f(0) = f(1) = 0$$

Questão 1(c) – Aplicação da Tese do Teorema

Tese do Teorema de Rolle

Satisfeitas todas as hipóteses, existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que:

$$f'(c) = 0$$

Questão 1(c) – Aplicação da Tese do Teorema

Tese do Teorema de Rolle

Satisfeitas todas as hipóteses, existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que:

$$f'(c) = 0$$

Cálculo da Função Derivada $f'(x)$

Pela Regra do Produto:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x-1) \cdot \sin(x) + (x-1) \cdot \frac{d}{dx}(\sin(x))$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + (x-1)\cos(x) = \sin(x) + (x-1)\cos(x)$$

Questão 1(c) – Aplicação da Tese do Teorema

Tese do Teorema de Rolle

Satisfeitas todas as hipóteses, existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que:

$$f'(c) = 0$$

Cálculo da Função Derivada $f'(x)$

Pela Regra do Produto:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x-1) \cdot \sin(x) + (x-1) \cdot \frac{d}{dx}(\sin(x))$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + (x-1)\cos(x) = \sin(x) + (x-1)\cos(x)$$

Aplicação no Ponto Crítico $c \in (0,1)$

$$f'(c) = 0 \iff \sin(c) + (c-1)\cos(c) = 0$$

$$\sin(c) = -(c-1)\cos(c) = (1-c)\cos(c)$$

Questão 1(c) – Obtenção da Equação Cotangente

Análise dos Fatores em $c \in (0,1)$

Como $c \in (0,1) \subset (0, \pi/2)$:

- $\sin(c) > 0$ (em particular, $\sin(c) \neq 0$);
- $c < 1 \implies 1 - c > 0$ (em particular, $1 - c \neq 0$).

Questão 1(c) – Obtenção da Equação Cotangente

Análise dos Fatores em $c \in (0,1)$

Como $c \in (0,1) \subset (0, \pi/2)$:

- $\sin(c) > 0$ (em particular, $\sin(c) \neq 0$);
- $c < 1 \implies 1 - c > 0$ (em particular, $1 - c \neq 0$).

Manipulação Algébrica

Dividindo ambos os membros de $\sin(c) = (1-c)\cos(c)$ por $\sin(c) \cdot (1-c)$:

$$\frac{\sin(c)}{\sin(c) \cdot (1-c)} = \frac{(1-c)\cos(c)}{\sin(c) \cdot (1-c)} \implies \frac{1}{1-c} = \frac{\cos(c)}{\sin(c)}$$

Questão 1(c) – Obtenção da Equação Cotangente

Análise dos Fatores em $c \in (0,1)$

Como $c \in (0,1) \subset (0, \pi/2)$:

- $\sin(c) > 0$ (em particular, $\sin(c) \neq 0$);
- $c < 1 \implies 1 - c > 0$ (em particular, $1 - c \neq 0$).

Manipulação Algébrica

Dividindo ambos os membros de $\sin(c) = (1-c)\cos(c)$ por $\sin(c) \cdot (1-c)$:

$$\frac{\sin(c)}{\sin(c) \cdot (1-c)} = \frac{(1-c)\cos(c)}{\sin(c) \cdot (1-c)} \implies \frac{1}{1-c} = \frac{\cos(c)}{\sin(c)}$$

Conclusão

Reconhecendo $\cot(c) = \dfrac{\cos(c)}{\sin(c)}$, obtemos:

$$\frac{1}{}$$

Questão 2(a) – Enunciado e Estratégia de Derivação

Enunciado – Item (a) [0,75 ponto]

Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 + \frac{x}{x^2 + 1} + 2\ln(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mostre que f é estritamente crescente em $(0, \infty)$ e admite inversa diferenciável g.

Questão 2(a) – Enunciado e Estratégia de Derivação

Enunciado – Item (a) [0,75 ponto]

Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 + \frac{x}{x^2 + 1} + 2\ln(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mostre que f é estritamente crescente em $(0, \infty)$ e admite inversa diferenciável g.

Estratégia

Para demonstrar que f é estritamente crescente, calcularemos sua derivada $f'(x)$ e provaremos que $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Questão 2(a) – Diferenciação Termo a Termo

Diferenciando cada parcela de $f(x)$ em relação a x:

1. $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$

Questão 2(a) – Diferenciação Termo a Termo

Diferenciando cada parcela de $f(x)$ em relação a x:

1. $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$
2. Pela Regra do Quociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Questão 2(a) – Diferenciação Termo a Termo

Diferenciando cada parcela de $f(x)$ em relação a x:

1. $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$
2. Pela Regra do Quociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

3. $\dfrac{d}{dx}[2\ln(x)] = \dfrac{2}{x}$

Questão 2(a) – Diferenciação Termo a Termo

Diferenciando cada parcela de $f(x)$ em relação a x:

1. $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$
2. Pela Regra do Quociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

3. $\dfrac{d}{dx}[2\ln(x)] = \dfrac{2}{x}$
4. Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left[-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}\cdot x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Questão 2(a) – Simplificação Algébrica da Derivada

Agrupando os Termos Racionais

Somando as parcelas fracionárias de denominadores correlatos:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1-x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Questão 2(a) – Simplificação Algébrica da Derivada

Agrupando os Termos Racionais

Somando as parcelas fracionárias de denominadores correlatos:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1-x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Expressão Completa e Fatorada de $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x}$$

Questão 2(a) – Simplificação Algébrica da Derivada

Agrupando os Termos Racionais

Somando as parcelas fracionárias de denominadores correlatos:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1-x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Expressão Completa e Fatorada de $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x}$$

Análise de Sinal para $x \in (0, \infty)$

Para todo $x > 0$:

- $3x^2 > 0$
- $(x^2+1)^2 > 0 \implies \dfrac{2}{(x^2+1)^2} > 0$
- $\dfrac{2}{x} > 0$

Questão 2(a) – Conclusão sobre a Inversa Diferenciável

Existência e Diferenciabilidade da Inversa

- Como $f'(x) > 0$ em todo o intervalo conexo $(0, \infty)$, f é **estritamente crescente**.
- Sendo estritamente crescente, f é injetora e, portanto, bijetora sobre sua imagem, garantindo a existência da função inversa $g = f^{-1}$.
- Como f é diferenciável e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, o **Teorema da Função Inversa** assegura que g é diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

Questão 2(b) – Cálculo Detalhado de $f(1)$

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Calcule o valor de $f(1)$.

Questão 2(b) – Cálculo Detalhado de $f(1)$

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Calcule o valor de $f(1)$.

Substituição Direta na Expressão Original

$$f(1) = (1)^3 + \frac{1}{1^2+1} + 2\ln(1) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

Questão 2(b) – Cálculo Detalhado de $f(1)$

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Calcule o valor de $f(1)$.

Substituição Direta na Expressão Original

$$f(1) = (1)^3 + \frac{1}{1^2+1} + 2\ln(1) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

- $(1)^3 = 1$
- $\dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$
- $2\ln(1) = 2 \cdot 0 = 0$
- $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Questão 2(b) – Cálculo Detalhado de $f(1)$

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Calcule o valor de $f(1)$.

Substituição Direta na Expressão Original

$$f(1) = (1)^3 + \frac{1}{1^2+1} + 2\ln(1) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

- $(1)^3 = 1$
- $\dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$
- $2\ln(1) = 2 \cdot 0 = 0$
- $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Resultado Final de $f(1)$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Questão 2(c) – Derivação Implícita da Identidade Inversa

Enunciado – Item (c) [0,75 ponto]

Utilizando o método da derivação implícita diretamente sobre $f(g(y)) = y$, determine $g'\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Questão 2(c) – Derivação Implícita da Identidade Inversa

Enunciado – Item (c) [0,75 ponto]

Utilizando o método da derivação implícita diretamente sobre $f(g(y)) = y$, determine $g'\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Derivação Implícita via Regra da Cadeia

Diferenciando ambos os membros da identidade $f(g(y)) = y$ em relação a y:

$$\frac{d}{dy}\left[f(g(y))\right] = \frac{d}{dy}[y]$$

$$f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1 \implies g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Questão 2(c) – Avaliação no Ponto Indicado

Identificação do Argumento

Desejamos calcular $g'(y_0)$ para $y_0 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

Questão 2(c) – Avaliação no Ponto Indicado

Identificação do Argumento

Desejamos calcular $g'(y_0)$ para $y_0 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

- Do item (b), sabemos que $f(1) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.
- Logo, por definição de função inversa:

$$g\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

- A relação da derivada implícita fornece:

$$g'\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(1)}$$

Questão 2(c) – Cálculo de $f'(1)$ e Conclusão

Cálculo de $f'(1)$

Utilizando a expressão simplificada de $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x}$$

Substituindo $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 + \frac{2}{(1^2+1)^2} + \frac{2}{1} = 3 + \frac{2}{4} + 2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

Questão 2(c) – Cálculo de $f'(1)$ e Conclusão

Cálculo de $f'(1)$

Utilizando a expressão simplificada de $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x}$$

Substituindo $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 + \frac{2}{(1^2+1)^2} + \frac{2}{1} = 3 + \frac{2}{4} + 2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

Resultado Final de $g'\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$g'\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{11/2} = \boxed{\mathbf{\frac{2}{11}}}$$

Questão 3 – Enunciado e Geometria do Silo

Enunciado [2,5 pontos]

Um silo fechado é composto por um cilindro circular reto acoplado a um topo cônico de mesma base e cuja altura do cone é igual ao raio da base ($h_c = r$). O volume total interno é fixado em $V_0 = 48\pi$ m^3. O custo por unidade de área do fundo plano circular e da cobertura cônica é 3 vezes maior do que o custo por unidade de área da superfície lateral cilíndrica. Determine o raio r e a altura h da parte cilíndrica que minimizam o custo total.

Questão 3 – Enunciado e Geometria do Silo

Enunciado [2,5 pontos]

Um silo fechado é composto por um cilindro circular reto acoplado a um topo cônico de mesma base e cuja altura do cone é igual ao raio da base ($h_c = r$). O volume total interno é fixado em $V_0 = 48\pi$ m^3. O custo por unidade de área do fundo plano circular e da cobertura cônica é 3 vezes maior do que o custo por unidade de área da superfície lateral cilíndrica. Determine o raio r e a altura h da parte cilíndrica que minimizam o custo total.

Variáveis e Parâmetros Geométricos

- Raio da base comum: $r > 0$;
- Altura da parte cilíndrica: $h > 0$;
- Altura da cobertura cônica: $h_c = r$;
- Geratriz do cone: $g_c = \sqrt{r^2 + h_c^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$.

Questão 3 – Vínculo de Volume Constante

Equação do Volume Total

O volume total é a soma dos volumes do cilindro e do cone:

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h_c$$

Substituindo $h_c = r$:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \left(h + \frac{r}{3}\right)$$

Questão 3 – Vínculo de Volume Constante

Equação do Volume Total

O volume total é a soma dos volumes do cilindro e do cone:

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h_c$$

Substituindo $h_c = r$:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \left(h + \frac{r}{3}\right)$$

Isolando a Altura Cilíndrica h

Como $V = 48\pi$:

$$\pi r^2 \left(h + \frac{r}{3}\right) = 48\pi \implies r^2 h + \frac{1}{3} r^3 = 48$$

$$h = \frac{48}{r^2} - \frac{r}{3}$$

Questão 3 – Modelagem da Função Custo

Áreas das Superfícies Componentes

- Fundo circular plano (base): $A_{\text{base}} = \pi r^2$
- Cobertura cônica: $A_{\text{cone}} = \pi r g_c = \pi r(r\sqrt{2}) = \sqrt{2}\pi r^2$
- Lateral cilíndrica: $A_{\text{lat}} = 2\pi rh$

Questão 3 – Modelagem da Função Custo

Áreas das Superfícies Componentes

- Fundo circular plano (base): $A_{\text{base}} = \pi r^2$
- Cobertura cônica: $A_{\text{cone}} = \pi r g_c = \pi r(r\sqrt{2}) = \sqrt{2}\pi r^2$
- Lateral cilíndrica: $A_{\text{lat}} = 2\pi rh$

Ponderação de Custos Unitários

Seja $c > 0$ o custo unitário da lateral cilíndrica. Então o custo unitário da base e do cone é $3c$:

$$C(r,h) = 3c \cdot A_{\text{base}} + 3c \cdot A_{\text{cone}} + c \cdot A_{\text{lat}}$$

$$C(r,h) = 3c(\pi r^2) + 3c(\sqrt{2}\pi r^2) + c(2\pi rh) = c\pi \left[3(1+\sqrt{2})r^2 + 2rh\right]$$

Questão 3 – Função Custo em Função de uma Única Variável

Substituição de $h(r)$

Calculando o termo $2rh$:

$$2rh = 2r\left(\frac{48}{r^2} - \frac{r}{3}\right) = \frac{96}{r} - \frac{2}{3}r^2$$

Questão 3 – Função Custo em Função de uma Única Variável

Substituição de $h(r)$

Calculando o termo $2rh$:

$$2rh = 2r\left(\frac{48}{r^2} - \frac{r}{3}\right) = \frac{96}{r} - \frac{2}{3}r^2$$

Agrupando os Termos Quadráticos

$$C(r) = c\pi\left[3(1+\sqrt{2})r^2 - \frac{2}{3}r^2 + \frac{96}{r}\right] = c\pi\left[\left(\frac{7+9\sqrt{2}}{3}\right)r^2 + \frac{96}{r}\right]$$

Questão 3 – Função Custo em Função de uma Única Variável

Substituição de $h(r)$

Calculando o termo $2rh$:

$$2rh = 2r\left(\frac{48}{r^2} - \frac{r}{3}\right) = \frac{96}{r} - \frac{2}{3}r^2$$

Agrupando os Termos Quadráticos

$$C(r) = c\pi\left[3(1+\sqrt{2})r^2 - \frac{2}{3}r^2 + \frac{96}{r}\right] = c\pi\left[\left(\frac{7+9\sqrt{2}}{3}\right)r^2 + \frac{96}{r}\right]$$

Definição da Constante de Simplificação

Definindo a constante positiva $K = \dfrac{7+9\sqrt{2}}{3}$, a função custo fica:

$$C(r) = c\pi\left(Kr^2 + \frac{96}{r}\right), \quad \text{com } r \in (0, \sqrt[3]{144})$$

Questão 3 – Minimização e Ponto Crítico

Derivada de Primeira Ordem $C'(r)$

$$C'(r) = c\pi\left(2Kr - \frac{96}{r^2}\right)$$

Questão 3 – Minimização e Ponto Crítico

Derivada de Primeira Ordem $C'(r)$

$$C'(r) = c\pi\left(2Kr - \frac{96}{r^2}\right)$$

Equação do Ponto Crítico: $C'(r) = 0$

$$2Kr - \frac{96}{r^2} = 0 \iff 2Kr^3 = 96 \iff r^3 = \frac{48}{K}$$

Substituindo $K = \dfrac{7 + 9\sqrt{2}}{3}$:

$$r^3 = \frac{48 \times 3}{7 + 9\sqrt{2}} = \frac{144}{7 + 9\sqrt{2}} \implies \mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{144}{7 + 9\sqrt{2}}}\ \text{m}$$

Questão 3 – Minimização e Ponto Crítico

Derivada de Primeira Ordem $C'(r)$

$$C'(r) = c\pi\left(2Kr - \frac{96}{r^2}\right)$$

Equação do Ponto Crítico: $C'(r) = 0$

$$2Kr - \frac{96}{r^2} = 0 \iff 2Kr^3 = 96 \iff r^3 = \frac{48}{K}$$

Substituindo $K = \dfrac{7+9\sqrt{2}}{3}$:

$$r^3 = \frac{48 \times 3}{7+9\sqrt{2}} = \frac{144}{7+9\sqrt{2}} \implies \mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{144}{7+9\sqrt{2}}}\ \text{m}$$

Confirmação do Mínimo Absoluto via Segunda Derivada

$$\left(\frac{192}{\ }\right)$$

Questão 3 – Determinação da Altura Ótima h

Cálculo da Altura h

Retomando a relação $h = \dfrac{48}{r^2} - \dfrac{r}{3}$:

$$\text{Como } r^3 = \frac{48}{K} \implies \frac{48}{r^2} = Kr$$

Logo:

$$h = Kr - \frac{r}{3} = \left(K - \frac{1}{3}\right) r$$

Questão 3 – Determinação da Altura Ótima h

Cálculo da Altura h

Retomando a relação $h = \dfrac{48}{r^2} - \dfrac{r}{3}$:

$$\text{Como } r^3 = \frac{48}{K} \implies \frac{48}{r^2} = Kr$$

Logo:

$$h = Kr - \frac{r}{3} = \left(K - \frac{1}{3}\right) r$$

Simplificação do Coeficiente Linear

$$K - \frac{1}{3} = \frac{7 + 9\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6 + 9\sqrt{2}}{3} = 2 + 3\sqrt{2}$$

Questão 3 – Determinação da Altura Ótima h

Cálculo da Altura h

Retomando a relação $h = \dfrac{48}{r^2} - \dfrac{r}{3}$:

$$\text{Como } r^3 = \frac{48}{K} \implies \frac{48}{r^2} = Kr$$

Logo:

$$h = Kr - \frac{r}{3} = \left(K - \frac{1}{3}\right) r$$

Simplificação do Coeficiente Linear

$$K - \frac{1}{3} = \frac{7 + 9\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6 + 9\sqrt{2}}{3} = 2 + 3\sqrt{2}$$

Dimensões Finais que Minimizam o Custo

Questão 4 – Dados Informados e Domínio

Informações Fornecidas

Seja f contínua no domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, derivável até segunda ordem em D:

- **Valores pontuais:** $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$, $f(0) = 4$;
- **Limites no ponto de descontinuidade:** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$;
- **Comportamento no infinito:** $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$;
- **Primeira derivada:** $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- **Segunda derivada:** $f''(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$ e $f''(x) < 0$ em $(1, +\infty)$.

Questão 4(a) – Monotonia, Pontos Críticos e Extremos

Enunciado – Item (a) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de monotonia, pontos críticos e extremos locais.

Questão 4(a) – Monotonia, Pontos Críticos e Extremos

Enunciado – Item (a) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de monotonia, pontos críticos e extremos locais.

- **Intervalos de Crescimento:** Como $f'(x) > 0$ em todo o domínio D, a função é:
  - Estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 1)$;
  - Estritamente crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

Questão 4(a) – Monotonia, Pontos Críticos e Extremos

Enunciado – Item (a) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de monotonia, pontos críticos e extremos locais.

- **Intervalos de Crescimento:** Como $f'(x) > 0$ em todo o domínio D, a função é:
  - Estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 1)$;
  - Estritamente crescente no intervalo $(1, +\infty)$.
- **Pontos Críticos:**

Questão 4(a) – Monotonia, Pontos Críticos e Extremos

Enunciado – Item (a) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de monotonia, pontos críticos e extremos locais.

- **Intervalos de Crescimento:** Como $f'(x) > 0$ em todo o domínio D, a função é:
  - Estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 1)$;
  - Estritamente crescente no intervalo $(1, +\infty)$.
- **Pontos Críticos:**
- Não há pontos do domínio onde $f'(x)$ não esteja bem definida.

Questão 4(a) – Monotonia, Pontos Críticos e Extremos

Enunciado – Item (a) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de monotonia, pontos críticos e extremos locais.

- **Intervalos de Crescimento:** Como $f'(x) > 0$ em todo o domínio D, a função é:
  - Estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 1)$;
  - Estritamente crescente no intervalo $(1, +\infty)$.
- **Pontos Críticos:**
- Não há pontos do domínio onde $f'(x)$ não esteja bem definida.
- **Extremos Locais:** Como a função nunca anula sua derivada e não há pontos de descontinuidade internos a subintervalos abertos do domínio onde ocorra inversão de monotonicidade, **não existem máximos nem mínimos locais**.

Questão 4(b) – Concavidade e Pontos de Inflexão

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de concavidade e a existência de pontos de inflexão.

Questão 4(b) – Concavidade e Pontos de Inflexão

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de concavidade e a existência de pontos de inflexão.

- **Intervalo de Concavidade para Cima (Convexa):** Em $(-\infty, 1)$, temos $f''(x) > 0$, logo o gráfico é **côncavo para cima** (convexo).

Questão 4(b) – Concavidade e Pontos de Inflexão

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de concavidade e a existência de pontos de inflexão.

- **Intervalo de Concavidade para Cima (Convexa):** Em $(-\infty, 1)$, temos $f''(x) > 0$, logo o gráfico é **côncavo para cima** (convexo).
- **Intervalo de Concavidade para Baixo (Côncava):** Em $(1, +\infty)$, temos $f''(x) < 0$, logo o gráfico é **côncavo para baixo** (côncavo).

Questão 4(b) – Concavidade e Pontos de Inflexão

Enunciado – Item (b) [0,5 ponto]

Determine os intervalos de concavidade e a existência de pontos de inflexão.

- **Intervalo de Concavidade para Cima (Convexa):** Em $(-\infty, 1)$, temos $f''(x) > 0$, logo o gráfico é **côncavo para cima** (convexo).
- **Intervalo de Concavidade para Baixo (Côncava):** Em $(1, +\infty)$, temos $f''(x) < 0$, logo o gráfico é **côncavo para baixo** (côncavo).
- **Pontos de Inflexão:** Para ser ponto de inflexão, o ponto deve pertencer ao gráfico de f, o que exige pertencer ao domínio. Embora a concavidade mude de sinal ao cruzar $x = 1$, $1 \notin D$. Portanto, **não existem pontos de inflexão**.

Questão 4(c) – Identificação Rigorosa das Assíntotas

Enunciado – Item (c) [0,5 ponto]

Identifique todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas).

Questão 4(c) – Identificação Rigorosa das Assíntotas

Enunciado – Item (c) [0,5 ponto]

Identifique todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas).

1. **Assíntota Vertical:** Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, a reta vertical

$$\mathbf{x = 1}$$

é uma assíntota vertical bilateral.

Questão 4(c) – Identificação Rigorosa das Assíntotas

Enunciado – Item (c) [0,5 ponto]

Identifique todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas).

1. **Assíntota Vertical:** Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, a reta vertical

$$\mathbf{x = 1}$$

é uma assíntota vertical bilateral.

2. **Assíntotas Horizontais:** Não existem assíntotas horizontais, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Questão 4(c) – Identificação Rigorosa das Assíntotas

Enunciado – Item (c) [0,5 ponto]

Identifique todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas).

1. **Assíntota Vertical:** Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, a reta vertical

$$\mathbf{x = 1}$$

é uma assíntota vertical bilateral.

2. **Assíntotas Horizontais:** Não existem assíntotas horizontais, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

3. **Assíntota Oblíqua:** Por definição, a reta $y = mx + b$ é assíntota oblíqua se $\lim[f(x) - (mx + b)] = 0$. Pelo dado do problema, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x + 1)] = 0$. Logo, a reta

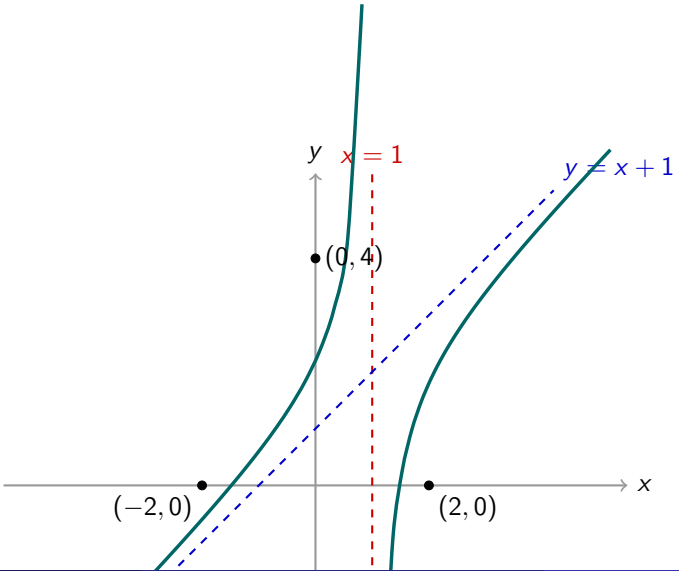
$$\mathbf{y = x + 1}$$

é a assíntota oblíqua de f tanto quando $x \to +\infty$ quanto quando $x \to -\infty$.

Questão 4(d) – Tabela Síntese de Propriedades

Característica	**Ramo Esquerdo:** $(-\infty, 1)$	**Ramo Direito:** $(1, +\infty)$
Sinal de $f'(x)$	Positivo ($f'(x) > 0$)	Positivo ($f'(x) > 0$)
Monotonia	Estritamente Crescente	Estritamente Crescente
Sinal de $f''(x)$	Positivo ($f''(x) > 0$)	Negativo ($f''(x) < 0$)
Concavidade	Para cima ($\cup$)	Para baixo ($\cap$)
Interceptos com Eixos	$(-2, 0)$ e $(0, 4)$	$(2, 0)$
Assíntotas	$y = x + 1$ (em $-\infty$); $x = 1$ ($+\infty$)	$x = 1$ ($-\infty$); $y = x + 1$ (em $+\infty$)

Questão 4(d) – Esboço Gráfico Qualitativo Minucioso



Questão 5(a) – Assíntota Oblíqua e Limites

Enunciado – Item (a) [1,0 ponto]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -2$. Sabendo que f possui uma assíntota oblíqua à direita da forma $y(x) = mx + b$, encontre a equação dessa reta sabendo que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + 2x) = 1$.

Questão 5(a) – Assíntota Oblíqua e Limites

Enunciado – Item (a) [1,0 ponto]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -2$. Sabendo que f possui uma assíntota oblíqua à direita da forma $y(x) = mx + b$, encontre a equação dessa reta sabendo que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + 2x) = 1$.

Determinação do Coeficiente Angular m

Pela definição analítica de coeficiente angular de assíntota oblíqua:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + 2x) = 1$, dividimos a expressão por x para $x > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

Observação

Observação

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pela regra de L'Hôpital, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -2$.

Questão 5(a) – Determinação do Coeficiente Linear b

Determinação do Coeficiente Linear b

Por definição de assíntota oblíqua $y = mx + b$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Substituindo $m = -2$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2x]$$

Questão 5(a) – Determinação do Coeficiente Linear b

Determinação do Coeficiente Linear b

Por definição de assíntota oblíqua $y = mx + b$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Substituindo $m = -2$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2x]$$

Aplicação da Hipótese do Enunciado

O limite fornecido no enunciado diz exatamente que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) = 1 \implies b = 1$$

Questão 5(a) – Determinação do Coeficiente Linear b

Determinação do Coeficiente Linear b

Por definição de assíntota oblíqua $y = mx + b$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Substituindo $m = -2$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2x]$$

Aplicação da Hipótese do Enunciado

O limite fornecido no enunciado diz exatamente que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) = 1 \implies b = 1$$

Equação da Reta Assíntota

A reta assíntota oblíqua à direita é:

$$y = -2x + 1$$

Questão 5(b)(i) – Polinômio de Taylor: Derivadas Sucessivas

Enunciado – Subitem (i)

Para $f(x) = \sqrt{1+2x}$, encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f centrado em $x_0 = 0$.

Questão 5(b)(i) – Polinômio de Taylor: Derivadas Sucessivas

Enunciado – Subitem (i)

Para $f(x) = \sqrt{1+2x}$, encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f centrado em $x_0 = 0$.

Cálculo Sistemático das Derivadas até Ordem 3

- $f(x) = (1+2x)^{1/2} \implies f(0) = (1)^{1/2} = 1$

Questão 5(b)(i) – Polinômio de Taylor: Derivadas Sucessivas

Enunciado – Subitem (i)

Para $f(x) = \sqrt{1+2x}$, encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f centrado em $x_0 = 0$.

Cálculo Sistemático das Derivadas até Ordem 3

- $f(x) = (1+2x)^{1/2} \implies f(0) = (1)^{1/2} = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2} \implies f'(0) = 1$

Questão 5(b)(i) – Polinômio de Taylor: Derivadas Sucessivas

Enunciado – Subitem (i)

Para $f(x) = \sqrt{1+2x}$, encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f centrado em $x_0 = 0$.

Cálculo Sistemático das Derivadas até Ordem 3

- $f(x) = (1+2x)^{1/2} \implies f(0) = (1)^{1/2} = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2} \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2} \implies f''(0) = -1$

Questão 5(b)(i) – Polinômio de Taylor: Derivadas Sucessivas

Enunciado – Subitem (i)

Para $f(x) = \sqrt{1+2x}$, encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f centrado em $x_0 = 0$.

Cálculo Sistemático das Derivadas até Ordem 3

- $f(x) = (1+2x)^{1/2} \implies f(0) = (1)^{1/2} = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2} \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2} \implies f''(0) = -1$
- $f'''(x) = -\left(-\frac{3}{2}\right)(1+2x)^{-5/2} \cdot 2 = 3(1+2x)^{-5/2} \implies f'''(0) = 3$

Questão 5(b)(i) – Montagem do Polinômio de Taylor $P_3(x)$

Fórmula Geral do Polinômio de Taylor de Ordem 3 em $x_0 = 0$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Questão 5(b)(i) – Montagem do Polinômio de Taylor $P_3(x)$

Fórmula Geral do Polinômio de Taylor de Ordem 3 em $x_0 = 0$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Substituição dos Coeficientes

$$P_3(x) = 1 + (1)x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{6}x^3$$

Questão 5(b)(i) – Montagem do Polinômio de Taylor $P_3(x)$

Fórmula Geral do Polinômio de Taylor de Ordem 3 em $x_0 = 0$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Substituição dos Coeficientes

$$P_3(x) = 1 + (1)x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{6}x^3$$

Expressão Final do Polinômio de Taylor

$$\mathbf{P_3(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3}$$

Questão 5(b)(ii) – Resto de Lagrange $R_3(x)$

Enunciado – Subitem (ii)

Obtenha a fórmula para o resto de Lagrange $R_3(x)$.

Questão 5(b)(ii) – Resto de Lagrange $R_3(x)$

Enunciado – Subitem (ii)

Obtenha a fórmula para o resto de Lagrange $R_3(x)$.

Fórmula Geral do Resto de Lagrange de Ordem 3

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \quad \text{com } c \text{ estritamente entre } 0 \text{ e } x$$

Questão 5(b)(ii) – Resto de Lagrange $R_3(x)$

Enunciado – Subitem (ii)

Obtenha a fórmula para o resto de Lagrange $R_3(x)$.

Fórmula Geral do Resto de Lagrange de Ordem 3

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \quad \text{com } c \text{ estritamente entre } 0 \text{ e } x$$

Cálculo da Quarta Derivada $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left[3(1+2x)^{-5/2}\right] = 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)(1+2x)^{-7/2} \cdot 2 = -\frac{15}{(1+2x)^{7/2}}$$

Questão 5(b)(ii) – Resto de Lagrange $R_3(x)$

Enunciado – Subitem (ii)

Obtenha a fórmula para o resto de Lagrange $R_3(x)$.

Fórmula Geral do Resto de Lagrange de Ordem 3

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \quad \text{com } c \text{ estritamente entre 0 e } x$$

Cálculo da Quarta Derivada $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left[3(1+2x)^{-5/2}\right] = 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)(1+2x)^{-7/2} \cdot 2 = -\frac{15}{(1+2x)^{7/2}}$$

Fórmula do Resto de Lagrange

Como $4! = 24$, simplificando a fração $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$:

Questão 5(b)(iii) – Aproximação Numérica de $\sqrt{1,2}$

Enunciado – Subitem (iii)

Use o polinômio obtido para aproximar $\sqrt{1,2}$ e demonstre formalmente, usando a expressão do resto, que o erro absoluto cometido é estritamente inferior a 10^{-4}.

Questão 5(b)(iii) – Aproximação Numérica de $\sqrt{1,2}$

Enunciado – Subitem (iii)

Use o polinômio obtido para aproximar $\sqrt{1,2}$ e demonstre formalmente, usando a expressão do resto, que o erro absoluto cometido é estritamente inferior a 10^{-4}.

Identificação do Ponto x

Para aproximar $\sqrt{1,2} = \sqrt{1+2x}$:

$$1 + 2x = 1,2 \implies 2x = 0,2 \implies x = 0,1 = \frac{1}{10}$$

Questão 5(b)(iii) – Aproximação Numérica de $\sqrt{1,2}$

Enunciado – Subitem (iii)

Use o polinômio obtido para aproximar $\sqrt{1,2}$ e demonstre formalmente, usando a expressão do resto, que o erro absoluto cometido é estritamente inferior a 10^{-4}.

Identificação do Ponto x

Para aproximar $\sqrt{1,2} = \sqrt{1+2x}$:

$$1 + 2x = 1,2 \implies 2x = 0,2 \implies x = 0,1 = \frac{1}{10}$$

Cálculo de $P_3(0,1)$

$$P_3(0,1) = 1 + 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{2}(0,1)^3$$

$$P_3(0,1) = 1 + 0,1 - \frac{1}{2}(0,01) + \frac{1}{2}(0,001) = 1 + 0,1 - 0,005 + 0,0005 = \mathbf{1,0955}$$

Questão 5(b)(iii) – Demonstração Formal do Erro Absoluto

Expressão do Erro Absoluto

O erro absoluto da aproximação por Taylor é o módulo do resto de Lagrange:

$$|E| = |f(0,1) - P_3(0,1)| = |R_3(0,1)| = \left| -\frac{5}{8}\frac{(0,1)^4}{(1+2c)^{7/2}} \right| = \frac{5}{8}\frac{10^{-4}}{(1+2c)^{7/2}}$$

onde $c \in (0; 0,1)$.

Questão 5(b)(iii) – Demonstração Formal do Erro Absoluto

Expressão do Erro Absoluto

O erro absoluto da aproximação por Taylor é o módulo do resto de Lagrange:

$$|E| = |f(0,1) - P_3(0,1)| = |R_3(0,1)| = \left| -\frac{5}{8}\frac{(0,1)^4}{(1+2c)^{7/2}} \right| = \frac{5}{8}\frac{10^{-4}}{(1+2c)^{7/2}}$$

onde $c \in (0; 0,1)$.

Estimativa da Cota Superior

Como $c > 0$:

$$1 + 2c > 1 \implies (1+2c)^{7/2} > 1 \implies \frac{1}{(1+2c)^{7/2}} < 1$$

Questão 5(b)(iii) – Demonstração Formal do Erro Absoluto

Expressão do Erro Absoluto

O erro absoluto da aproximação por Taylor é o módulo do resto de Lagrange:

$$|E| = |f(0,1) - P_3(0,1)| = |R_3(0,1)| = \left| -\frac{5}{8}\frac{(0,1)^4}{(1+2c)^{7/2}} \right| = \frac{5}{8}\frac{10^{-4}}{(1+2c)^{7/2}}$$

onde $c \in (0; 0,1)$.

Estimativa da Cota Superior

Como $c > 0$:

$$1 + 2c > 1 \implies (1+2c)^{7/2} > 1 \implies \frac{1}{(1+2c)^{7/2}} < 1$$

Conclusão da Desigualdade Solicitada

Multiplicando por $\frac{5}{8} \cdot 10^{-4}$: