LISTA DE EXERCÍCIOS

Integração por Frações Parciais

Enunciados e Gabaritos

Casos Abordados na Lista

- **Exercício 1:** Denominador com **três raízes reais distintas**.
- **Exercício 2:** Denominador com **duas raízes iguais e uma distinta**.
- **Exercício 3:** Denominador com **duas raízes reais iguais**.
- **Exercício 4:** Denominador com **três raízes reais iguais**.
- **Exercício 5:** Denominador **sem raízes reais** (quadrático irredutível).
- **Exercício 6:** Grau do numerador **maior** que o do denominador (Caso I).
- **Exercício 7:** Grau do numerador **maior** que o do denominador (Caso II).

Exercício 1 — Enunciado

Caso 1: Denominador com Três Raízes Reais Diferentes

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 2}{x^3 - x}\, dx$$

Exercício 1 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Fatoração do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) \quad \text{(raízes: } 0,\ 1,\ -1\text{)}$$

2. Decomposição e cálculo das constantes:

$$\frac{4x^2 + 4x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando ambos os lados por $x(x-1)(x+1)$:

$$4x^2 + 4x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

- Para $x = 0$: $-2 = A(-1)(1) \implies A = 2$
- Para $x = 1$: $4 + 4 - 2 = B(1)(2) \implies 6 = 2B \implies B = 3$
- Para $x = -1$: $4 - 4 - 2 = C(-1)(-2) \implies -2 = 2C \implies C = -1$

3. Integração termo a termo:

$$\int \frac{4x^2+4x-2}{x^3-x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Resposta Final

$$\int \frac{4x^2+4x-2}{x^3-x}\,dx = 2\ln|x| + 3\ln|x-1| - \ln|x+1| + K$$

Exercício 2 — Enunciado

Caso 2: Denominador com Duas Raízes Iguais e Uma Diferente

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{9x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$$

Exercício 2 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Montagem da fração parcial (fator repetido $(x-1)^2$):

$$\frac{9x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-1)^2(x+2)$:

$$9x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

2. Determinação das constantes A, B e C:

- Para $x = 1$: $9(1) = B(1+2) \implies 9 = 3B \implies B = 3$
- Para $x = -2$: $9(-2) = C(-2-1)^2 \implies -18 = 9C \implies C = -2$
- Para $x = 0$: $0 = A(-1)(2) + 3(2) + (-2)(-1)^2 \implies 0 = -2A + 4 \implies A = 2$

3. Integração termo a termo:

$$\int \frac{9x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int (x-1)^{-2}\,dx - 2\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

Lembrando que $\int (x-1)^{-2}\,dx = \dfrac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x-1}$:

Resposta Final

$$\int \frac{9x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - 2\ln|x+2| + K$$

Exercício 3 — Enunciado

Caso 3: Denominador com Duas Raízes Iguais

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{4x+7}{x^2+6x+9}\,dx$$

Exercício 3 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Fatoração e montagem da decomposição:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \implies \frac{4x+7}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

Multiplicando por $(x+3)^2$:

$$4x + 7 = A(x+3) + B$$

- Para $x = -3$: $4(-3) + 7 = B \implies B = -5$
- Para $x = 0$: $7 = 3A - 5 \implies 3A = 12 \implies A = 4$

2. Integração:

Resposta Final

$$\int \left(\frac{4}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} \right) dx = 4 \ln |x+3| + \frac{5}{x+3} + K$$

Exercício 4 — Enunciado

Caso 4: Denominador com Três Raízes Iguais

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x-2)^3}\, dx$$

Exercício 4 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Montagem das frações parciais para raiz tripla $x = 2$:

$$\frac{3x^2 - 8x + 6}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

Multiplicando por $(x-2)^3$:

$$3x^2 - 8x + 6 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C$$

2. Determinação das constantes:

- Para $x = 2$: $3(4) - 8(2) + 6 = C \implies C = 2$
- Expandindo o lado direito: $Ax^2 + (-4A + B)x + (4A - 2B + C)$
- Igualando coeficientes de x^2: $A = 3$
- Igualando coeficientes de x: $-4(3) + B = -8 \implies B = 4$

3. Integração termo a termo:

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x-2)^3}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3} \right) dx$$
$$= 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 4\int (x-2)^{-2}\,dx + 2\int (x-2)^{-3}\,dx$$

Aplicando a regra da potência $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$:

Resposta Final

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x-2)^3}\,dx = 3\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + K$$

Exercício 5 — Enunciado

Caso 5: Denominador Sem Raízes Reais

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{4x + 14}{x^2 + 4x + 13}\, dx$$

Exercício 5 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Verificação do discriminante e completamento de quadrado:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(13) = -36 < 0 \quad \text{(irredutível em } \mathbb{R}\text{)}$$

$$x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 4x + 4) + 9 = (x+2)^2 + 3^2$$

2. Ajuste do numerador com a derivada do denominador ($2x + 4$):

$$4x + 14 = 2(2x + 4) + 6$$

Separando a integral em duas parcelas:

$$\int \frac{4x + 14}{x^2 + 4x + 13}\, dx = 2 \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13}\, dx + 6 \int \frac{1}{(x+2)^2 + 3^2}\, dx$$

Exercício 5 — Gabarito (Conclusão)

3. Resolução das duas integrais imediatas:

- Primeira integral ($u = x^2 + 4x + 13 \implies du = (2x + 4)\,dx$):

$$2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln(x^2 + 4x + 13)$$

- Segunda integral ($\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a}$, com $v = x + 2$ e $a = 3$):

$$6 \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2 \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

Resposta Final

$$\int \frac{4x + 14}{x^2 + 4x + 13}\,dx = 2 \ln(x^2 + 4x + 13) + 2 \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + K$$

Exercício 6 — Enunciado

Caso 6: Grau do Numerador Maior que o do Denominador (I)

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}\, dx$$

Exercício 6 — Gabarito (Passo a Passo)

1. **Divisão polinomial (grau $3 >$ grau 2):** Dividindo $x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ por $x^2 - 1$:
   - Quociente: $Q(x) = x + 2$
   - Resto: $R(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 4) - (x + 2)(x^2 - 1) = -4x + 6$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = x + 2 + \frac{-4x + 6}{x^2 - 1}$$

2. **Frações parciais no resto:**

$$\frac{-4x + 6}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \implies -4x + 6 = A(x+1) + B(x-1)$$

   - Para $x = 1$: $2 = 2A \implies A = 1$
   - Para $x = -1$: $10 = -2B \implies B = -5$

3. Integração completa (polinômio + frações parciais):

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}\, dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x+1} \right) dx$$

Resposta Final

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| - 5\ln|x+1| + K$$

Exercício 7 — Enunciado

Caso 7: Grau do Numerador Maior que o do Denominador (II)

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

Exercício 7 — Gabarito (Passo a Passo)

1. Divisão polinomial (grau $3 >$ grau 2): Dividindo $2x^3 + 5x^2 + 7x + 6$ por $x^2 + 2x + 2$:

- Quociente: $Q(x) = 2x + 1$
- Resto: $R(x) = (2x^3 + 5x^2 + 7x + 6) - (2x + 1)(x^2 + 2x + 2) = x + 4$

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{x^2 + 2x + 2} = 2x + 1 + \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 2}$$

2. Tratamento do resto (denominador sem raízes reais, $\Delta = -4 < 0$):

$$x + 4 = \frac{1}{2}(2x + 2) + 3 \quad \text{e} \quad x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

$$\frac{x + 4}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{(x + 1)^2 + 1}$$

3. Integração termo a termo:

$$\int \frac{2x^3+5x^2+7x+6}{x^2+2x+2}\,dx = \int (2x+1)\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Resposta Final

$$\int \frac{2x^3+5x^2+7x+6}{x^2+2x+2}\,dx = x^2+x+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+3\arctan(x+1)+K$$