Teorema Fundamental do Cálculo

Enunciados e Demonstrações – Partes 1 e 2

Cristian Favio Coletti

CMCC – Universidade Federal do ABC (UFABC)

12 de novembro de 2026

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Enunciado

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Defina a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Se f é contínua em um ponto $c \in (a, b)$, então F é derivável em c e

$$F'(c) = f(c).$$

Observação nos Extremos

Nos extremos a e b, o resultado vale para as respectivas derivadas laterais:

- $F'_+(a) = f(a)$, se f for contínua à direita em a;
- $F'_-(b) = f(b)$, se f for contínua à esquerda em b.

TFC – Parte 1: Demonstração (Quociente de Newton)

Queremos mostrar que $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$.

- Para $h \neq 0$ pequeno tal que $c+h \in [a,b]$, pela aditividade da integral:

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

- Como $f(c)$ é constante em relação a t, escrevemos:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,dt.$$

- Subtraindo as expressões e aplicando a desigualdade triangular:

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} \big(f(t)-f(c)\big)\,dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} |f(t)-f(c)|\,dt\right|.$$

TFC – Parte 1: Demonstração (Continuidade e Limite)

- Como f é contínua em c, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [a, b]$:

$$|t - c| < \delta \implies |f(t) - f(c)| < \varepsilon.$$

- Tomando $0 < |h| < \delta$, todo ponto t entre c e $c + h$ satisfaz $|t - c| \leq |h| < \delta$. Logo, $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ em todo o intervalo de integração.
- Estimando a integral pelo comprimento $|h|$ do intervalo:

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Conclusão

Portanto, $\lim_{h \to 0} \dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$, ou seja, $F'(c) = f(c)$. ■

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Enunciado (Fórmula de Newton-Leibniz)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Suponha que exista uma função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que:

1. G é contínua em $[a, b]$;
2. G é derivável em (a, b) e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ (G é uma primitiva de f).

Então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

TFC – Parte 2: Demonstração (Soma Telescópica e TVM)

Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição arbitrária de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

- Escrevemos $G(b) - G(a)$ como uma soma telescópica:

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(G(x_i) - G(x_{i-1})\big).$$

- Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, G satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Logo, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que:

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Como $G'(c_i) = f(c_i)$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, obtemos uma soma de Riemann:

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

TFC – Parte 2: Demonstração (Passagem ao Limite)

- Como f é integrável à Riemann em $[a, b]$, quando a norma da partição $\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ tende a zero, as somas de Riemann convergem para a integral definida, independentemente da escolha dos pontos c_i:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- Como $G(b) - G(a)$ é constante e não depende de P, segue da unicidade do limite:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a). \qquad \blacksquare$$

Dedução Direta (Caso f Contínua em $[a, b]$)

Se f é contínua em $[a, b]$, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Pela Parte 1, $(G - F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$ em (a, b). Pelo Corolário do TVM, $G(x) - F(x) = C$. Avaliando em $x = a$ tem-se $C = G(a)$, e em $x = b$ conclui-se que $G(b) - \int_a^b f(t)\, dt = G(a)$.