Técnicas de Integração Indefinida

Substituição, Por Partes, Substituição Trigonométrica e Frações Parciais

Cristian F. Coletti

UFABC

10 de novembro de 2026

Método de Substituição: Introdução (1/2)

Conceito Fundamental

O método de substituição é a contrapartida da Regra da Cadeia para derivadas. Se F é uma antiderivada de f, então:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

- **Estratégia:** Escolher uma função auxiliar $u = g(x)$ cuja derivada $du = g'(x)\,dx$ esteja presente no integrando (a menos de uma constante multiplicativa).
- Transforma integrais compostas complexas em formas imediatas mais simples.

Método de Substituição: Exemplos (2/2)

1. **(Simples 1)** $\int 2x(x^2+5)^4\,dx$
2. **(Simples 2)** $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}\,dx$
3. **(Média)** $\int xe^{x^2}\,dx$
4. **(Difícil 1)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
5. **(Difícil 2)** $\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\,dx$

Integração por Partes: Introdução (1/2)

Fórmula Básica

Derivada do produto: $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$. Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **Costuma funcionar nos seguintes casos:**
  - **L**ogarítmicas ($\ln x$)
  - **I**nversas trigonométricas ($\arctan x, \arcsin x$)
  - **A**lgebricas (x^n)
  - **T**rigonométricas ($\sin x, \cos x$)
  - **E**xponenciais (e^x)

Integração por Partes: Exemplos (2/2)

1. **(Simples 1)** $\int xe^x \, dx$
2. **(Simples 2)** $\int x \ln(x) \, dx$
3. **(Média)** $\int x^2 \sin(x) \, dx$
4. **(Difícil 1)** $\int e^{2x} \cos(3x) \, dx$
5. **(Difícil 2)** $\int (\ln(x))^2 \, dx$

Substituição Trigonométrica: Introdução (1/2)

Principais Casos e Identidades

Utilizada para eliminar raízes quadradas de somas ou diferenças de quadrados através de identidades fundamentais ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, etc.):

1. $\sqrt{a^2 - x^2} \implies x = a\sin\theta,\ dx = a\cos\theta\, d\theta$
2. $\sqrt{a^2 + x^2} \implies x = a\tan\theta,\ dx = a\sec^2\theta\, d\theta$
3. $\sqrt{x^2 - a^2} \implies x = a\sec\theta,\ dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

Substituição Trigonométrica: Exemplos (2/2)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+25}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

Frações Parciais: Introdução (1/2)

Decomposição de Funções Racionais

Para integrar funções racionais $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onde $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$:

- **Fatores Lineares Distintos** $(ax + b)$**:** Decompõe-se em $\frac{A}{ax+b}$.
- **Fatores Quadráticos Irredutíveis** $(ax^2 + bx + c)$**:** Decompõe-se em $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.
- **Nota prévia:** Se a fração for imprópria ($\text{grau}(P) \geq \text{grau}(Q)$), realiza-se primeiramente a divisão polinomial.

Frações Parciais: Exemplos (2/2)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}\, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}\, dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 - 1}\, dx$ (Requer divisão polinomial prévia)