LISTA DE EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Integrais Engenhosas

Enunciados e Gabaritos Passo a Passo Sem Mistérios

Integrais e Truques Abordados

- **Integral 1:** $\int \sec x \, dx$ (Fator integrante $\sec x + \tan x$)
- **Integral 2:** $\int \sec^3 x \, dx$ (Partes cíclica + identidade pitagórica)
- **Integral 3:** $\int e^x \cos x \, dx$ (Integração por partes dupla com retorno)
- **Integral 4:** $\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx$ (Multiplicação pelo conjugado)
- **Integral 5:** $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$ (Soma e subtração estratégica no numerador)
- **Integral 6:** $\int \frac{1}{x(x^4+1)} \, dx$ (Decomposição sem frações parciais longas)
- **Integral 7:** $\int \frac{x^2+1}{\quad} \, dx$ (Divisão por x^2 e completamento de quadrado)

Exercício 1 — Enunciado

Integral Indefinida da Secante

Calcule a integral indefinida:

$$\int \sec x \, dx$$

Exercício 1 — Gabarito (Passo a Passo)

1. O Truque (multiplicar e dividir por $\sec x + \tan x$):

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

2. Substituição simples: Observe que o numerador é exatamente a derivada do denominador. Fazendo:

$$u = \sec x + \tan x \implies du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) \, dx$$

Substituindo na integral:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

Resposta Final

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Exercício 2 — Enunciado

Integral Indefinida de Secante ao Cubo

Calcule a integral indefinida:

$$\int \sec^3 x \, dx$$

Exercício 2 — Gabarito (Passo 1: Integração por Partes)

1. O Truque (fatorar $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$ e integrar por partes): Chamando $I = \int \sec^3 x \, dx$, escolhemos:

- $u = \sec x \implies du = \sec x \tan x \, dx$
- $dv = \sec^2 x \, dx \implies v = \tan x$

Aplicando $\int u \, dv = uv - \int v \, du$:

$$I = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

2. Uso da identidade trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$\begin{aligned} I &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x \, dx}_{I} + \int \sec x \, dx \end{aligned}$$

Exercício 2 — Gabarito (Passo 2: Isolando I)

3. Equação algébrica para I: Passando $-I$ para o lado esquerdo e usando o resultado do Exercício 1 ($\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x|$):

$$I + I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$

$$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$

Dividindo ambos os lados por 2 (com $C = C_1/2$):

Resposta Final

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Exercício 3 — Enunciado

Integral Cíclica Exponencial-Trigonométrica

Calcule a integral indefinida:

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Exercício 3 — Gabarito (Passo a Passo)

1. O Truque (aplicar partes duas vezes mantendo o mesmo padrão de escolha):
Seja $I = \int e^x \cos x \, dx$. Na primeira aplicação:

- $u = \cos x \implies du = -\sin x \, dx$ e $dv = e^x \, dx \implies v = e^x$

$$I = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

2. Segunda aplicação de partes em $\int e^x \sin x \, dx$:

- $u = \sin x \implies du = \cos x \, dx$ e $dv = e^x \, dx \implies v = e^x$

$$I = e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I} \right) \implies 2I = e^x(\cos x + \sin x) + C_1$$

Resposta Final

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$$

Exercício 4 — Enunciado

Quociente Trigonométrico com Conjugado

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

Exercício 4 — Gabarito (Passo a Passo)

1. O Truque (multiplicar numerador e denominador por $1 - \sin x$):

$$\int \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx$$

2. Simplificação usando $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$:

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) dx = \int (\sec^2 x - \tan x \sec x)\, dx$$

3. Integração imediata de cada termo:

Resposta Final

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \tan x - \sec x + C$$

Exercício 5 — Enunciado

Manipulação Algébrica no Numerador

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

Exercício 5 — Gabarito (Passo a Passo)

1. O Truque (somar e subtrair e^x no numerador):

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

2. Separação em duas integrais elementares:

$$\int 1\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Na segunda integral, fazemos $u = 1+e^x \implies du = e^x\,dx$ (note que $1+e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$):

$$x - \int \frac{du}{u} = x - \ln(1+e^x) + C$$

Resposta Final

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = x - \ln(1+e^x) + C$$

Exercício 6 — Enunciado

Função Racional de Grau Alto

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$$

Exercício 6 — Gabarito (Passo a Passo)

1. O Truque (escrever $1 = (x^4+1) - x^4$ para evitar 5 constantes):

$$\int \frac{(x^4+1)-x^4}{x(x^4+1)}\,dx = \int \left(\frac{x^4+1}{x(x^4+1)} - \frac{x^4}{x(x^4+1)}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1}\right) dx$$

2. Substituição na segunda parcela: Para $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$, tomamos $u = x^4+1 \implies du = 4x^3\,dx \implies x^3\,dx = \frac{du}{4}$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$$

Resposta Final

$$\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$$

Exercício 7 — Enunciado

O Clássico Racional Simétrico

Calcule a integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$$

Exercício 7 — Gabarito (Passo 1: Divisão por x^2)

1. O Truque (dividir numerador e denominador por x^2):

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\,dx$$

2. Completamento de quadrado no denominador: Como o numerador é $1+\frac{1}{x^2}$, buscamos escrever o denominador em termos de $u = x - \frac{1}{x}$ (cuja derivada é $du = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$):

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \implies x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

Exercício 7 — Gabarito (Passo 2: Substituição e Arco-Tangente)

3. Substituição $u = x - \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}\, dx = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2}$$

Usando a integral imediata $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$ com $a = \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) + C$$

Resposta Final

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) + C$$