Gabarito das Integrais

Resolução dos Exercícios

Cristian F. Coletti
Funções de uma Variável

UFABC

10 de novembro de 2026

Substituição: Exemplo 1

Exercício: $\int 2x(x^2+5)^4\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Escolha da função interna (u):** Notamos a expressão (x^2+5) elevada à quarta potência. Definimos $u = x^2+5$.
2. **Cálculo do diferencial (du):** Derivamos u em relação a x: $\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x\,dx$.
3. **Substituição na integral:** Substituímos u e du na expressão original: $\int (x^2+5)^4 \cdot (2x\,dx) = \int u^4\,du$.
4. **Integração:** Aplicamos a regra da potência: $\frac{u^5}{5} + C$.
5. **Retorno à variável original:** Substituímos u por x^2+5: $\boldsymbol{\frac{(x^2+5)^5}{5} + C}$.

Substituição: Exemplo 2

Exercício: $\int e^{3x}\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Escolha da função interna (u):** O expoente da exponencial é $3x$. Definimos $u = 3x$.
2. **Cálculo do diferencial (du):** $du = 3\,dx \implies dx = \frac{du}{3}$.
3. **Substituição na integral:** $\int e^u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u\,du$.
4. **Integração:** A integral de e^u é o próprio e^u: $\frac{1}{3}e^u + C$.
5. **Retorno à variável original:** $\mathbf{\frac{1}{3}e^{3x} + C}$.

Substituição: Exemplo 3

Exercício: $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Identificação da derivada:** Sabemos que a derivada de $\ln(x)$ é $\frac{1}{x}$. Isso sugere a substituição $u = \ln(x)$.
2. **Diferencial:** $du = \frac{1}{x}\,dx$.
3. **Reescrita da integral:** Note que $\frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x) \cdot \left(\frac{1}{x}\,dx\right)$. Substituindo: $\displaystyle\int u\,du$.
4. **Integração e Retorno:** $\displaystyle\frac{u^2}{2} + C \implies \frac{(\ln \mathbf{x})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} + \mathbf{C}$.

Substituição: Exemplo 4

Exercício: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Manipulação algébrica do denominador:** Reescrevemos x^4 como $(x^2)^2$, obtendo $\sqrt{1-(x^2)^2}$.
2. **Substituição:** Seja $u = x^2$. O diferencial é $du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{du}{2}$.
3. **Substituição na integral:** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$.
4. **Integração:** A integral resultante é a definição do arco-seno: $\frac{1}{2}\arcsin(u) + C$.
5. **Retorno:** $\mathbf{\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C}$.

Substituição: Exemplo 5

Exercício: $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Primeira Substituição:** Seja $w = \ln(x) \implies dw = \frac{1}{x}\,dx$. A integral se transforma em $\displaystyle\int \frac{1}{w\ln(w)}\,dw$.
2. **Segunda Substituição:** Agora definimos $u = \ln(w) \implies du = \frac{1}{w}\,dw$. A expressão torna-se $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du$.
3. **Integração:** $\ln|u| + C$.
4. **Retorno sucessivo:** Como $u = \ln(w)$ e $w = \ln(x)$, temos $u = \ln(\ln(x))$. Logo: $\ln|\ln(\ln(\mathbf{x}))| + \mathbf{C}$.

Integração por Partes: Exemplo 1

Exercício: $\int xe^x \, dx$

Passo a Passo Detalhado (Fórmula: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$)

1. **Escolha de u e dv (Critério LIATE):** Fazemos $u = x$ (algébrica) e $dv = e^x \, dx$ (exponencial).
2. **Derivada e Integral parciais:** $du = dx$ e $v = \int e^x \, dx = e^x$.
3. **Aplicação da fórmula:** $x \cdot e^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C$.
4. **Fatoração final:** $\mathbf{e^x(x-1)+C}$.

Integração por Partes: Exemplo 2

Exercício: $\int x\cos(x)\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Escolha:** $u = x \implies du = dx$; e $dv = \cos(x)\,dx \implies v = \sin(x)$.
2. **Aplicação da fórmula:** $x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$.
3. **Integração do termo restante:** A integral de $\sin(x)$ é $-\cos(x)$.
4. **Resultado final:** $\mathbf{x\sin(x) + \cos(x) + C}$.

Integração por Partes: Exemplo 3

Exercício: $\int \ln(x)\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Escolha astuta:** Fazemos $u = \ln(x)$ e $dv = dx$ (pois conhecemos a derivada do logaritmo e a integral de dx).
2. **Derivada e Integral parciais:** $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = x$.
3. **Aplicação da fórmula:** $x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx$.
4. **Resultado final:** $\mathbf{x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C}$.

Integração por Partes: Exemplo 4

Exercício: $\int e^x \sin(x)\, dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **1ª Aplicação:** Escolhemos $u = e^x \implies du = e^x dx$ e $dv = \sin x dx \implies v = -\cos x$.
   $-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$.
2. **2ª Aplicação (no termo $\int e^x \cos x dx$):** $u = e^x, dv = \cos x dx \implies v = \sin x$.
   $-e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \right)$.
3. **Isolamento algébrico da integral I:**
   $I = e^x(\sin x - \cos x) - I \implies 2I = e^x(\sin x - \cos x)$.
4. **Resultado:** $\dfrac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{2}}(\sin \mathbf{x} - \cos \mathbf{x}) + \mathbf{C}$.

Integração por Partes: Exemplo 5

Exercício: $\int \arctan(x)\,dx$

Passo a Passo Detalhado

1. **Escolha:** $u = \arctan(x) \implies du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ e $dv = dx \implies v = x$.
2. **Aplicação:** $x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.
3. **Resolução do termo remanescente:** Usamos substituição simples $w = 1 + x^2 \implies dw = 2x\,dx$, obtendo $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
4. **Resultado final:** $\mathbf{x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$.

Substituição Trigonométrica: Exemplos 1 e 2

Ex 1: $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

1. **Substituição:** Como temos $\sqrt{a^2-x^2}$, usamos $x = 2\sin\theta \implies dx = 2\cos\theta\,d\theta$. Note que $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$.
2. **Desenvolvimento:** $\int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta = \int 1\,d\theta = \theta + C$.
3. **Retorno:** $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \mathbf{C}$.

Ex 2: $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$

1. **Substituição:** Forma $a^2 + x^2 \implies x = 3\tan\theta \implies dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$.
2. **Desenvolvimento e Resultado:** $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \mathbf{C}$.

Substituição Trigonométrica: Exemplos 3, 4 e 5

Ex 3: $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

Fazendo $x = 3\sin\theta$, resulta em $9\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \mathbf{C}$.

Ex 4: $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

Fazendo $x = \sin\theta$, resulta em $\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\arcsin(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}\right) + \mathbf{C}$.

Ex 5: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

Fazendo $x = 2\sec\theta$, resulta em $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + \mathbf{C}$.

Frações Parciais: Exemplos 1 e 2

Ex 1: $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

1. **Fatoração:** $x^2-1=(x-1)(x+1)$.
2. **Decomposição:** $\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \implies A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$.
3. **Integração:** $\frac{1}{2}\ln|\mathbf{x-1}|-\frac{1}{2}\ln|\mathbf{x+1}|+\mathbf{C}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+1}}\right|+\mathbf{C}$.

Ex 2: $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$

Fatorando $(x-3)(x+1)$, obtém-se a decomposição $\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+1}$, cuja integral é $\mathbf{3}\ln|\mathbf{x-3}|+\mathbf{2}\ln|\mathbf{x+1}|+\mathbf{C}$.

Frações Parciais: Exemplos 3, 4 e 5

Ex 3: $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)^2}\,dx$ (Fatores Repetidos)

Decomposição em $\frac{3}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} \implies \mathbf{3\ln|x-1| - \frac{8}{x-1} + C}$.

Ex 4: $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

Fatores $x(x-1)(x+1) \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \implies \mathbf{\ln\left|\frac{x(x-1)}{x+1}\right| + C}$.

Ex 5: $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$ (Fração Imprópria)

Divisão polinomial prévia resulta em $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$, cuja integral é $\mathbf{\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C}$.