Cálculo de Probabilidades

Lista 1 - Revisão

1. Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^{\complement}$?

2. Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \dots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

3. Sejam E, F e G três eventos. Encontre uma expressão para os seguintes eventos

   (a) Apenas o evento E ocorre.

   (b) Os eventos E e G ocorrem mas não o evento F.

   (c) Pelo menos um dos eventos ocorre.

   (d) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.

   (e) Os três eventos ocorrem.

   (f) Nenhum dos eventos ocorre.

   (g) No máximo, um dos eventos ocorre.

   (h) No máximo, dois dos eventos ocorrem.

   (i) Exatamente dois dos eventos ocorrem.

   (j) No máximo, três dos eventos ocorrem.

4. Se há 12 pessoas desconhecidas em uma sala, qual a probabilidade de nenhum par de pessoas faça aniversário no mesmo mês?

5. Dois dados são lançados em sequência n vezes. Calcule a probabilidade de que dois 6 apareçam no mesmo lançamento pelo menos uma vez. Estime o valor de n para que esta probabilidade seja pelo menos $\frac{1}{2}$.

6. Um professor possui um chaveiro com 15 chaves. Se consideramos que ele escolhe as chaves de modo aleatório.

   (a) Qual a probabilidade dele abrir a porta exatamente na sétima tentativa se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

   (b) Qual a probabilidade dele abrir a porta exatamente na sétima tentativa se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

   (c) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

   (d) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

   (e) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

   (f) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

7. *Regra da multiplicação.* Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos de um espaço amostral Ω. Provar que:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

8. *Teorema da probabilidade total.* Considere os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ de um espaço amostral Ω tal que: $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Provar que, para um evento qualquer B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

9. *Teorema de Bayes.* Considere os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ de um espaço amostral Ω tal que: $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Além do anterior, suponha que $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\forall i = 1, .., n$. Provar que para qualquer evento B com $\mathbb{P}(B) > 0$ e para todo $k = 1, .., n$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

10. Uma urna contém inicialmente 5 bolas brancas e 7 bolas negras. Toda vez que uma bola é retirada, sua cor é registrada e é substituída, na urna, por duas bolas da mesma cor. Calcule a probabilidade de que
    (a) As primeiras duas bolas retiradas são negras e as outras duas são brancas;
    (b) Entre as primeiras 4 bolas retiradas há exatamente duas negras.

11. João tem duas moedas idênticas, a não ser pelo fato de terem probabilidades diferentes de sair cara. Uma delas é honesta, ou seja, tem probabilidade 1/2 de sair cara. A outra é desonesta, e tem probabilidade 1/3 de sair cara. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada resultando em cara. Qual a probabilidade de ter sido a moeda honesta?

12. Joana tem três moedas na bolsa; duas honestas e uma terceira desonesta com probabilidade p de sair cara e probabilidade $1 - p$ de sair coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada resultando em cara. Qual a probabilidade de ter sido uma das moedas honestas?

13. A urna I contém 2 bolas brancas e 4 bolas vermelhas, enquanto que a urna II contém 1 bola branca e 1 bola vermelha. Uma bola é escolhida aleatoriamente da urna I e colocada na urna II. Logo, uma bola é escolhida aleatoriamente da urna II. Qual
    (a) a probabilidade de que a bola escolhida da urna II seja branca?
    (b) a probabilidade condicional de que a bola transferida seja branca dado que uma bola branca foi escolhida da urna II?

14. Um carcereiro comunica a três prisioneiros que um deles foi escolhido aleatoriamente para ser transladado a um presídio de segurança máxima e, que os outros dois serão liberados. O prisioneiro A pede para o carcereiro lhe dizer em privado qual de seus colegas será liberado alegando que não será beneficiado por isto já que ele já sabe que um de seus colegas será, de fato, liberado. O carcereiro se recusa a responder esta pergunta sobre a alegação de que se o prisioneiro A souber esta informação a sua própria probabilidade de ser transferido mudaria de 1/3 para 1/2 porque ele seria um dos dois prisioneiros que seria transferido. Comente o raciocínio do carcereiro.

15. Suponha que, durante o voo, de forma independente, os motores de um avião tenham probabilidade 1-p de falharem. Se um avião precisa da maioria de seus motores operando para completar um voo de forma bem-sucedida, para que valores de p um avião com 5 motores é preferível em relação ao um avião de 3 motores?