LISTA 1

Espaços Vetoriais

1 — Determine se são espaços vetoriais

a O conjunto de pares de números reais em $\mathbb{R}^2$ da forma $(0, y)$.

b O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

c O conjunto das matrizes $3x3$ triangulares superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

2 — Seja V um espaço vetorial. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que se $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$nv = \underbrace{v + \ldots + v}_{n \text{ parcelas}}.$$

3 — Seja V um espaço vetorial. Sejam $u, v \in V$ não nulos. Prove que v é múltiplo de u se e somente se, u é múltiplo de v.

4 — Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição de produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras diferentes, a definição de soma $u + v$ de vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a $u + v = (x + y', x' + y)$,

b $u + v = (xx', yy')$,

c $u + v = (3x + 3x', 5x + 5x')$.

5 — Defina a média $u \star v$ entre dois vetores u, v no espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se e somente se, $u = w$.

6 — Dados os espaços vetoriais V_1, V_2, considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de V_1 por V_2), cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.

7 — Dado $C[-1, 1]$ o espaço das funções contínuas em $[-1, 1]$. Quais dos seguintes funcionais sã o lineares

a $f \to \int_{-1}^{1} f(x)dx$

b $f \to \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

c $f \to f(0)$ (delta de Dirac)

d $f \to \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ com $g(x)$ uma função contínua fixa.

8 — Dado K^∞ o conjunto de todas as sequências com $a_i \epsilon K$ com adição o coordenada a coordenada e multiplicação o por escalares coordenada a coordenada. Quais dos seguintes conjuntos sã o subespaços:

a O conjunto das sequências com apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero.

- b Nenhuma coordenada igual a 1
  Nos próximos itens $K = \mathbb{R}$
- c O conjunto das séries de Cauchy, ou seja, as sequencias tais que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que
  $|x_n - x_m| < \epsilon$ para $n, m > N$.
- d As sequências tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$
- e As sequências limitadas.

9 — Dado K um corpo finito com q elementos. Quantos elementos possui o espaço vetorial K^n. Quantas soluções possui a equação $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$=0?

10 — Seja $P_n(x)$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes num corpo F de grau menor igual a n. Mostre que:

- a $1, x, ...x^n$ é uma base para L. As coordenadas do polinômio nessa base são os seus coeficientes.
- b $1, x-a, (x-a)^2, \ldots .(x-a)^n$ uma base de L. Se $\mathrm{char}(K) = p > n$ então as coordenadas do polinômio nessa base são $\{f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2}, \ldots \frac{f^n(a)}{n!}\}$

11 — Dado V um espaço vetorial sobre F. Prove que:

- a $0v = 0$ para todo $v \in V$. Descreva os diferentes significados de 0 nessa equação.
- b Se $\mathrm{rv} = 0$então ou $r = 0$ ou $v = 0$.
- c Se $\mathrm{rv} = v$ então ou $v = 0$ ou $r = 1$.

12 — Considere o subconjunto S das funções de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que são soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

13 — Prove que a intersecção de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

14 —

- a Prove que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$, são o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo
- b Prove que todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são o próprio $\mathbb{R}$, o subespaço nulo ou o subespaço consistindo de um múltiplo de um vetor fixo em $\mathbb{R}$.
- c Quais sã o todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$?

15 — Dados W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tal que a união deles seja subespaço. Prove que $W_1 \subset W_2$ ou que $W_2 \subset W_1$.

16 —

- a Dado S um subconjunto de um espaço vetorial V defina o subespaço gerado por S: $\mathrm{span}(S) = \langle S \rangle$.
- b Prove que os vetores v_1, v_2 são L.I. se e somente se $\langle v_1 \rangle \bigcap \langle v_2 \rangle = 0$.
- c Prove que $\langle v_1 \rangle \bigcap \langle v_2 \rangle \bigcap \langle v_3 \rangle = 0$ não implica que os vetores v_1, v_2, v_3 sejam L.I..
- d Dado $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset V$. Prove que S é L.I. se e somente se $\mathrm{span}(S \backslash s_i) \neq \mathrm{span}(S)$ para todo $s_i \epsilon S$.
- e Prove que se $A, B \subset V$. Então $\mathrm{span}(A) + \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(A \bigcup B)$.

$\boxed{\text{f}}$ Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \operatorname{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \operatorname{span}(\mathfrak{B}_2)$.