LISTA 5

Autovalores e Autovetores

1 — Decida se o operador linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

a $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

b $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

2 — Prove que

a Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de T então $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são os autovalores de T^k.

b Seja V um e.v. sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e seja $T : V \to V$ um operador linear. Prove que α é um autovalor de $p(T)$ se e somente se $\alpha = p(\lambda)$ para algum λ autovalor de T.

3 — Prove que o polinômio característico da transposta de um operador T^t coincide com o polinômio característico de T.

4 — Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim \operatorname{Im}(T) = m$, então T tem no máximo $m + 1$ autovalores.

5 — Sejam $T, S : V \to V$ operadores lineares. Suponha que v é autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1, λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor de:

a $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b $S \circ T$

6 —

a Mostre que se $B, M \in M_n(\mathbb{K})$ com M invertível, então $(M^{-1}BM)^n = (M^{-1}B^nM)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$ onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Daniel Miranda

c Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Dado $n \in \mathbb{N}$ determine $B \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$

7 — Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ calcule A^{2020}. Agora seja $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ consegue calcular B^{2020}? **Dica**: Pela divisão euclideana de x^k por P_B temos que $x^k = P_B(x)q_k(x) + r_k(x)$ onde $r_k = 0$ ou $\deg(r_k) < \deg(P_B)$. Encontre r_k.

8 — Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\}$ e $\mathcal{C} = \{x^2, x, 1\}$. Mostre que T é diagonalizável.

9 — Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considere as funções $f_1(x) = e^{2x}\sin(x)$, $f_2(x) = e^{2x}\cos(x)$ e $f_3(x) = e^{2x}$, o subespaço $S = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Determine:

a A matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S.

b Os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

10 — Seja $T : V \to V$ $(\dim V < \infty)$ um operador diagonalizável cujos autovalores têm multiplicidade algébrica 1.

a Prove que qualquer operador $G : V \to V$ tal que $GT = TG$ pode ser representado como um polinômio em T.

b Prove que a dimensão do espaço vetorial formado por tais operadores (operadores que comutam com T) é igual a dimensão de V.

11 — Sejam $S, T : V \to V$ operadores diagonalizáveis que comutam. Então eles são simultaneamente diagonalizáveis, i.e. existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}$ consiste de autovetores de S e de T.

12 — Sejam V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que T comuta com todo operador diagonalizável. Prove que T é um múltiplo escalar da identidade.

13 — Seja $m \in \mathbb{R}$ e A a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Encontre os autovalores de A.

b) Para que valores de m a matriz A é diagonalizável?

c) Determine, de acordo com os diferentes valores de m, o polinômio minimal de A.

14 — Fixemos um vetor não nulo $a \in \mathbb{R}^3$ e defina a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T(v) = a \times v$ (produto vetorial).

a) Prove que T é uma transformação linear.

b) Determine os autovalores e autovetores de T.

15 — Considere uma matriz real simétrica A de ordem 3 com determinante igual a 6. Suponha que $u = (4, 8, -1)$ e $v = (1, 0, 4)$ sejam autovetores desta matriz associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Os autovalores de A são apenas 1 e 2.

b) O produto vetorial $u \times v$ é autovetor de A.

c) O vetor $(5, 8, 3)$ é autovetor de A.

d) A pode não ser diagonalizável.

16 — Prove que se $T : V \to V$ é um operador linear, então $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ são subespaços T-invariantes. Se λ for um autovalor de T então $\mathrm{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante.

17 — Prove que a soma e a intersecção de subespaços T-invariantes é T-invariante.

18 — Prove que se um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ com $\dim V < \infty$ é um isomorfismo então T e T^{-1} possuem os mesmos subespaços invariantes. Vale em dimensão infinita?

19 — Mostre que se todo subespaço de V for T-invariante então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$.

20 — Mostre que $W \subseteq V$ é um subespaço invariante para $T \in \mathcal{L}(V)$ se e só se W^0 é T^t-invariante.

21 — Sejam $T, G : V \to V$ operadores que comutam. Mostre que $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Aut}_T(\lambda)$ são G-invariantes.

22 — Sejam V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V = n$, $T : V \to V$ um operador linear, $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante. Mostre que $p_{T|_W} \mid P_T$ e $m_{T|_W} \mid m_T$. **Dica**: lembre que se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonal por blocos

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

onde $B \in M_k(\mathbb{K})$ e $D \in M_{n-k}(\mathbb{K})$, então $A^n = \begin{pmatrix} B^n & \widetilde{C} \\ 0 & D^n \end{pmatrix}$.

23 — Sejam $T : V \to V$ um operador linear, $W \subseteq V$ um subespaço. Então W é $p(T)$-invariante para todo polinômio $p \in \mathbb{K}[x]$ se e somente se W for T-invariante.

24 — Seja $\pi : V \to V$ um operador projeção não trivial (i.e., $\pi \neq 0_{\mathcal{L}(V)}$ e $\pi \neq \mathrm{I}_V$) mostre que $m_\pi = x^2 - x$.

25 — Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Se o polinômio característico de uma transformação linear $T : V \to V$ é $x^2 - x - 1$, então é correto afirmar que:

- a T não é necessariamente inversível.
- b T é inversível e $T^{-1} = T + I$.
- c Não existe T com tal polinômio característico.
- d T é inversível e $T^{-1} = T - I$.
- e T é inversível, mas nenhuma das fórmulas para a inversa de T nos outros itens é válida.

26 — Seja $T \in \mathcal{L}(V)$.

- a Mostre que $T : V \to V$ é um operador linear não injetor se e somente se 0 é um autovalor de T.
- b Mostre que T é inversível se e somente se o termo independente de seu polinômio minimal é não-nulo.
- c Nestas circunstâncias, T^{-1} é um polinômio em T, i.e., existe $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que $T^{-1} = p(T)$.

27 — Seja A uma matriz complexa tal que $A^k = I$ para algum inteiro k. Prove que A é diagonalizável.

28 — Prove que uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ que satisfaz $A^3 = A$ pode ser diagonalizada.

29 — Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico P_T dado. É possível concluir que algum deles é necessariamente diagonalizável?

a) $p_T(x) = (x-3)^3(x-2)^2$

b) $p_T(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

c) $p_T(x) = (x-1)^m$, $m \geq 1$

30 — Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e seja $T : V \to V$ um operador. Prove que T é nilpotente se e somente se todos os seus autovalores forem iguais a zero.

31 — Seja V um e.v. sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ os autovalores de T e $q(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$. Mostre que $q(T)$ é nilpotente. Qual o índice de nilpotência?

32 — Dado T, G operadores lineares num espaço n-dimensional sobre um corpo de característica zero. Assuma que $T^n = 0$, $\dim\ker T = 1$ e que $GT - TG = T$. Prove que os autovalores de G são da forma $\alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots, \alpha-(n-1)$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$.

33 — Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então $T = T_1 \oplus T_2$ (de forma única) onde T_1 é nilpotente e T_2 é um isomorfismo.

34 — Seja $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Mostre que T não se escreve como soma direta de um operador nilpotente com um isomorfismo.

35 — Seja $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ um operador com polinômio característico $p_T(x) = (x-\lambda)^n$. Mostre que o operador $T' = \lambda\,\mathrm{Id} - T$ é nilpotente.

36 — Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Se $\dim \mathfrak{I}(T) = 1$ mostre que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.

37 — Se V é um $\mathbb{C}$-e.v. de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear mostre que $T^{n+1} = T$ se e somente se $T^{2n} = T^n$ e T diagonalizável.

ÁLGEBRA LINEAR AVANÇADA

38 — Para V espaço vetorial real de dimensão finita, uma involução em V é um operador linear $\varphi : V \to V$ tal que $\varphi^2 = \mathrm{I}$. Dado um operador linear $T : V \to V$, sejam

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in V : T(x) = x\} \quad \text{e} \quad A(T) = \{x \in V : T(x) = -x\}$$

chamados subespaço de pontos fixos de T e subespaço antipodal de T, respectivamente. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a Se φ é uma involução, então $\det(\varphi) = 1$.
- b Se φ_1, φ_2 são involuções então $\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$.
- c Se λ é autovalor de uma involução, então $\lambda = \pm 1$.
- d Se φ_1, φ_2 são involuções, então $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é também uma involução.
- e Se φ é uma involução, então $A(\varphi) = \mathfrak{I}(\mathrm{I} - \varphi)$.

39 — [**Densidade de** $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$] O objetivo desse exercício é mostrar que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ e quaisquer matrizes $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ os polinômios característicos P_{AB} e P_{BA} satisfazem a seguinte relação:

$$(-1)^m x^m \cdot P_{AB}(x) = (-1)^n x^n \cdot P_{BA}(x).$$

Em particular, para matrizes quadradas A e B temos que $P_{AB}(x) = P_{BA}(x)$. Também, segue que, a menos de $\lambda = 0$, AB e BA têm os mesmos autovalores, com a mesma multiplicidade.

- a Mostre que o resultado vale para A invertível (e logo $n = m$).
- b Mostre que $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ é denso em $M_n(\mathbb{C})$ com sua topologia usual.
- c Deduza que o resultado é válido para $n = m$ com A não necessariamente invertível.
- d Deduza que o resultado é válido para quaisquer $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- e O resultado é valido se considerarmos os polinômios minimais m_{AB} e m_{BA}de AB e BA?