LISTA 1

Forma Racional e de Jordan

1 — Seja $\{T_i : i \in I\}$ um subconjunto de $\mathcal{L}(V)$ onde V é um e.v. de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Suponha que $T_iT_j = T_jT_i$ para todo $i, j \in I$. Mostre que V pode ser escrito como soma direta de autoespaços generalizados comuns a todos os $T_i, i \in I$.

2 — Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ache a decomposição primária de $\mathbb{R}^3$ e encontre bases para cada um desses subespaços T-invariantes.

3 — Seja $A \in M_6(\mathbb{R})$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16I_6 = 0$. Quais são as possíveis formas de Jordan não semelhantes para A?

4 — Seja $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p(x+1)$.

a) Determine a forma de Jordan de T.

b) Para $n = 4$, encontre uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J$.

5 — Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

veja que $p_A = p_B = p_C = p_D = (x-2)^4$. Determine a forma de Jordan de cada uma.

6 — Dados um polinômio $f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\dots(x-\lambda_k)^{d_k}$ e um espaço vetorial V com $\dim V = n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$. Quantos operadores $T : V \to V$ com $p_T = f$ existem?

7 — Ache todas as formas de Jordan possíveis para uma transformação linear com polinômio característico $P_T = (x-2)^3(x-1)^2(x-5)$. Ache o polinômio minimal correspondente a cada uma dessas formas de Jordan.

Daniel Miranda

8 — Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z,w) = (3z+w, 2x+2y-4z+2w, z+w, 3w-z)$$

a Encontre a base e a forma de Jordan de T.

b Descreva todos os subespaços T-invariantes.

9 — Seja T um operador linear no $\mathbb{K}$-e.v. V de dimensão finita. Suponha que $m_T = (x-\lambda_1)^{m_1}\dots(x-\lambda_k)^{m_k}$, mostre que existe um operador diagonalizável $D \in \mathcal{L}(V)$ e um operador nilpotente $N \in \mathcal{L}(V)$ tal que

a $T = D + N$,

b $DN = ND$.
Prove ainda que os operadores D e N são univocamente determinados por a e b e cada um deles é um polinômio em T.

10 — A seguinte afirmação é falsa ou verdadeira: se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz com entradas complexas de ordem n é tal que $A^4 = I_n$ então

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

pode ser um bloco de Jordan de A.

11 — Seja $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômios característico e minimal dados, respectivamente, por $P_T = (x-2)^4(x-1)^2$ e $m_T = (x-2)^2(x-1)^2$. Além disso suponha que $\dim\ker(T-2\mathrm{I}) = 2$. Nestas condições encontre a forma de Jordan de T. Com os polinômios característico e minimal acima é possível supormos que $\dim\ker(T-2\mathrm{I}) = 1$?

12 —

a Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz complexa invertível, definimos suas partes *real* e *imaginária* $R, J \in M_n(\mathbb{R})$ como sendo

$$R = \Re(A) \text{ e } J = \Im(A)$$

de forma que $A = R + iJ$. Mostre que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R + \lambda_0 J$ é invertível.

b Deduza que se duas matrizes reais $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são semelhantes em $M_n(\mathbb{C})$ então elas são semelhantes em $M_n(\mathbb{R})$.

13 — Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real satisfazendo a seguinte condição $A^3 = I_n$. Mostre que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

14 — Sejam N_1 e N_2 matrizes de ordem 6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes de ordem 7.

15 — Dê a forma de Jordan de um operador linear $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com polinômio característico $p_T(x) = (x-1)^2(x-2)^4(x-3)$ e tal que $\dim(\ker(T-2\mathrm{I}) = 2, \dim(\ker(T-\mathrm{I})) = 1$ e $\ker(T-2\mathrm{I})^3 \neq \ker(T-2\mathrm{I})^2$.

16 — Seja $N \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente tal que $\dim\ker(N) = k,\ 0 < k < n$.

a Mostre que $\dim\ker(N^l) \leq kl$, para todo $l \geq 1$.

b Prove que $n \leq kr$, onde r e o é grau do polinômio minimal de N.

17 — [**Forma de Jordan Real**] O objetivo deste exercício é apresentar a "Forma de Jordan Real" de todo operador linear definido num espaço vetorial real. Seja V um espaço vetorial real. Defina o espaço vetorial complexo $V_{\mathbb{C}}$ como no Exercício 16 da Lista 1. Denotemos os elementos de $V_{\mathbb{C}}$ por $(x, y) = x + iy$.

a Mostre que se $T \in \mathcal{L}(V)$, então a aplicação $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ dada por $T_{\mathbb{C}}(x+iy) = T(x) + iT(y)$ é um operador linear em $V_{\mathbb{C}}$.

b Mostre que se $\mathcal{B}$ é base de V então $\mathcal{B}$ é uma base de $V_{\mathbb{C}}$. Logo $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ e $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T_{\mathbb{C}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

c Conclua que a matriz de T é semelhante em $V_{\mathbb{C}}$ a uma matriz de Jordan.

Se o polinômio característico de um operador $T : V \to V$ fatora-se completamente em fatores lineares em $\mathbb{R}$ então a forma de Jordan usual de T é a forma de Jordan real de T. Suponha que T admita um autovalor complexo da forma $\lambda = \alpha + i\beta$ com $b \neq 0$, então sabemos que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ é também um autovalor de T (Exercício 15.2 da Lista 4).

d Mostre que as bases dos autoespaços generalizados $V(\lambda)$ e $V(\overline{\lambda})$ podem ser escolhidas conjugadas.

e Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}\}$ dois conjuntos de vetores LI que originam os dois blocos de Jordan $J_k(\lambda)$ e $J_k(\overline{\lambda})$ de ordem k. Denote por $v_i = \Re(u_i)$ e $w_i = \Im(u_i)$, mostre que o conjunto $\mathcal{C} = \{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_k, w_k\}$ é LI.

f Mostre que $T(v_k) = \alpha v_k - \beta w_k$, $T(w_k) = \beta v_k + \alpha w_k$, e para $j = 1, \ldots, k-1$ tem-se $T(v_j) = v_{j+1} + \alpha v_j - \beta w_j$ e $T(w_j) = w_{j+1} + \beta v_j + \alpha w_j$, onde $\alpha = \Re(\lambda)$ e $\beta = \Im(\lambda)$. Encontre a matriz de $T|_{\langle \mathcal{C} \rangle}$.

g Conclua que existe uma base B de V tal que $[T]_B^B$ é diagonal por blocos e as matrizes na diagonal são da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & & & & & & \\ -\beta & \alpha & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \alpha & \beta & & & & & & \\ 0 & 1 & -\beta & \alpha & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \alpha & \beta & & & & \\ & & 0 & 1 & -\beta & \alpha & & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & \alpha & \beta \\ & & & & & & 0 & 1 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

e blocos de Jordan associados a autovalores reais.

- h Encontre uma base e a forma de Jordan real para o operador $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_{\underline{B}}^{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

18 — Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $A^2 + I_n = 0$. Prove que $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

onde $I_k \in M_k(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

19 — Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se A e B são semelhantes sobre o corpo dos números complexos, então elas são também semelhantes sobre $\mathbb{R}$.

20 — Mostre que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é semelhante à sua transposta.

21 — Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$, $v \in V$ e $T : V \to V$ um operador linear, seja $Z(v;T) = \bigcap_{W \in C(v;T)} W$ onde $C(v;T) = \{W \subseteq V \mid W$ é subespaço T-invariante e $v \in W\}$. Mostre que:

- a $Z(v;T)$ é T-invariante
- b $Z(v;T)$ é o menor subespaço de V, T-invariante que contem v.
- c $Z(v;T) = \{g(T)(v) \in V \mid g \in \mathbb{K}[x]\}$
- d $\dim Z(v;T) = 1$ se, e somente se, v é um autovetor de T.

22 — Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja $B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que B é semelhante sobre $\mathbb{K}$ a uma e somente uma matriz que está na forma racional.

23 — Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que se existe um vetor cíclico para T^2 então existe um vetor cíclico para T. Vale a recíproca?

24 — Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear com polinômio minimal $m_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$ onde os $p_i(x)$ são distintos e irredutíveis em $\mathbb{K}[x]$. Seja $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ a decomposição de V dada pelo teorema da decomposição primária. Mostre que para todo subespaço T-invariante W de V temos que

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} (W \cap W_i).$$

25 — Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Sejam $p \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio irredutível e m um inteiro positivo. Suponha que existe $v \in V$ tal que $p_v = p^m$. Seja $w \in Z(v; T)$.

- a Mostre que $w = q(T)p(T)^l(v)$ onde $q \in \mathbb{K}[x]$ é coprimo com p e $0 \le l \le m$.
- b Mostre que $Z(w; T) = Z(p(T)^l(v); T)$. Logo os únicos subespaços T-cíclicos de $Z(v; T)$ são

$$0 = Z(p(T)^m(v); T) \subset Z(p(T)^{m-1}(v); T) \subset \cdots \subset Z(p(T)(v); T) \subset Z(v; T).$$

- c Mostre que todo subespaço T-invariante de $Z(v; T)$ é T-cíclico, ou seja, é da forma $Z(p(T)^l(v); T)$ com $0 \le l \le m$.

26 — Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.

- a Prove que se existe um vetor cíclico para T então todo subespaço próprio T-invariante de V também tem um vetor cíclico.
- b Vale a recíproca do item a?

27 — Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador diagonalizável.

- a Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem n autovalores distintos.
- b Mostre que se T tem n autovalores distintos e se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T, então $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ é um vetor cíclico de T.

28 — Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$.

a Prove que $\mathfrak{I}T$ tem um complementar T-invariante se, e somente se, $\mathfrak{I}T \cap \ker T = 0$.

b Se $\mathfrak{I}T \cap \ker T = 0$, prove que $\ker T$ é o único complementar de $\mathfrak{I}T$ que é T-invariante.

29 — Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

30 — Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontre vetores $v_1, \cdots, v_r$ que satisfazem as condições do Teorema da Decomposição Cíclica.

31 — Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se, a seguinte afirmação é verdadeira: "Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T."

32 — Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que todo vetor $0 \neq v \in V$ é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $\mathbb{K}[x]$.

33 — Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que $P_T = m_T = p^m$ é uma potência de um polinômio irredutível. Prove que nenhum subespaço não trivial T-invariante de V tem um complementar que também é T-invariante.

34 — Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que $x^2 + 3$ é um divisor do polinômio minimal de T e 1 é o único autovalor de T. Quais são as possíveis formas racionais de T?

35 — Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^6)$ com polinômio minimal $m_T(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$. Ache as possíveis formas racionais de T para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

36 — Um operador linear T é dito *semissimples* se todo subespaço T-invariante de V tem um complemento que é também T-invariante. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e T um operador linear em V.

a) Mostre que se o polinômio minimal de T for irredutível em $\mathbb{K}$ então T é semissimples.

b) Se $\mathbb{K}$ for algebricamente fechado, prove que T é diagonalizável se, e somente se, é semissimples.

c) Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\underline{B}}^{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não é semissimples.