LISTA PARA ENTREGA 1

1 — Dado $\circ$ uma operação binária em A. Mostre que:

a) Se e é a identidade para $\circ$, então e é idempotente (um elemento a é idempotente quando $a \cdot a = a$).

b) Se $\circ$ é associativa e comutativa e a, b são idempotentes então $a \circ b$ é idempotente.

c) Se $\circ$ é associativa e a, b invertíveis então $a \circ b$ é invertível.

2 — Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.Então α é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$ se e somente se $p^{(m-1)}(\alpha) = 0$ mas $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$, onde $p^{(k)}(x)$ denota a k-ésima derivada de $p(x)$.

3 — Sejam $p, q \in \mathbb{K}[x]$ não nulos, mostre que:

a) Se $p \neq -q$ então $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$

b) $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

4 — Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo e um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$

5 — Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Mostre que:

a) Se 0_1 e 0_2 são elementos de $\mathbb{K}$ satisfazendo:

$$x + 0_1 = x \text{ e } x + 0_2 = x, \ \forall x \in \mathbb{K},$$

então $0_1 = 0_2$. Em outras palavras, existe um único elemento neutro da soma num corpo que denotamos por 0.

b) Dado $x \in \mathbb{K}$, se x_1 e x_2 são elementos de $\mathbb{K}$ satisfazendo:

$$x + x_1 = 0 \text{ e } x + x_2 = 0,$$

então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, num corpo cada elemento x possui um único oposto, denotado por $-x$.

c) Se x_1 e x_2 são elementos de $\mathbb{K}$ que satisfazem:

$$x_1 \cdot x = x \text{ e } x_2 \cdot x = x, \ \forall x \in \mathbb{K},$$

então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, um corpo possui uma única unidade, que é denotada por 1.

d) Dado $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq 0$, se x_1 e x_2 são elementos de $\mathbb{K}$ satisfazendo:

$$x \cdot x_1 = 1 \text{ e } x \cdot x_2 = 1,$$

então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, num corpo cada elemento não nulo x possui um único inverso multiplicativo, denotado por x^{-1}.

6 — Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Mostre que:

a) O vetor nulo $\mathbf{0}$ é único.

b) O vetor oposto $-\boldsymbol{v}$ a cada vetor $\boldsymbol{v} \in V$ é único.

c) $-1 \cdot \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in V$, conclua que $-(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$.

d) Dados $\alpha \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v} \in V$ temos $\alpha \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $v = 0$.

e) Dados $\alpha \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v} \in V$ temos $\alpha \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $v = 0$.

f) Mostre que se $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}$ então $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$.

g) O axioma de comutatividade da soma pode ser deduzido dos outros axiomas da definição de espaço vetorial

7 — Prove detalhadamente que o espaço de funções $\mathbb{K}(S) = \mathbb{K}^S$ é um espaço vetorial com a adição e multiplicação de funções por um escalar são definidas pontualmente:

- $(f+g)(s) \triangleq f(s) + g(s)$ para todos os $s \in S$,
- $(af)(s) \triangleq a(f(s))$ para todos os $a \in K, s \in S$.

8 — Se S é um conjunto finito com n elementos, quantos elementos possui o espaço vetorial $\mathbb{Z}_2^S$?

Daniel Miranda