Álgebra Linear Avançada

Relações e Cardinalidade

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Relações

Definição

*Uma **relação** R num conjunto X é um subconjunto R de $X \times X$. Denotaremos por xRy se $(x, y) \in R$.*

Uma relação R em X é dita:

a. reflexiva se xRx para todo $x \in X$
b. simétrica se xRy implica yRx.
c. transitiva se xRy e yRz implicam xRz.

Diremos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Usualmente escrevemos

$$a \sim b$$

ao invés de dizer que (a, b) pertence à relação $\sim$.

Definição

Uma relação $\sim$ definida em um conjunto X é uma relação de equivalência se satisfizer, para todo $a, b, c \in X$,

1. $a \sim a$.
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
3. $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Definição

Dada uma relação de equivalência $\sim$ *em um conjunto* X, *para cada* $x \in X$, *definimos a* **classe de equivalência** *de* x *por* $\sim$ *como*

$$[x] = \{y \in X \,:\, y \sim x\}.$$

Observe que, pela reflexividade de $\sim$, $x \in [x]$ para cada $x \in X$.

Proposição

Seja $\sim$ uma relação de equivalência no conjunto X. Então, para $x, y \in X$, são equivalentes:

a $y \in [x]$;

b $[x] = [y]$;

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Se $y \in [x], y \sim x$, então para cada $z \in [y]$, i.e, $z \sim y$, temos, por transitividade, $z \sim x$, então $z \in [x]$. Por outro lado, pela simetria de $\sim$, temos $x \sim y$, portanto, para cada $z \in [x]$, temos, novamente por transitividade, que $z \in [y]$. Assim, $[x] = [y]$. Por outro lado, se $[x] = [y]$, então $y \in [y] = [x]$. $\triangleleft$

Definição

O elemento $y \in [x]$ é denominado ***representante da classe***.

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$, e defina $\sim$ no conjunto das partes de A $\mathscr{P}(A)$ por $X \sim Y$se e somente se $|X| = |Y|$. É simples mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathscr{P}(A)$, sob a qual $\mathscr{P}(A)$ tem exatamente 4 classes de equivalência distintas:

$$[\emptyset] = \{\emptyset\},$$

$$[\{a\}] = [\{b\}] = [\{c\}] = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\},$$

$$[\{a, b\}] = [\{a, c\}] = [\{b, c\}] = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \text{ e}$$

$$[A] = A.$$

Definição

Seja X um conjunto. Então uma coleção de subconjuntos $P = \{X_i\}_{i \in I}$ é uma partição de X se cada $X_i \neq \emptyset$ e cada elemento de X estiver em exatamente um X_i. Em outras palavras, $P = \{X_i\}_{i \in I}$ é uma partição de X se e somente se:

a. $X_i \neq \emptyset$;
b. X_i *são mutuamente disjuntos:* $X_i \cap X_j = \emptyset$ *para* $i \neq j \in I$); *e*
c. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

Os conjuntos X_i são chamados de células da partição.

Exemplo

O conjunto $\{1,2,3\}$ possui 5 partições: a saber,

$$\{\{1,2,3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}, \{\{2,3\},\{1\}\} \text{e} \{\{1\},\{2\},\{3\}\}.$$

A primeira partição que mencionamos tem uma célula, as próximas três têm duas células e a última tem três células.

Teorema

Seja X tal conjunto. Então :

1. *Se $\sim$ é uma relação de equivalência em X, então o conjunto de todas as classes de equivalência de X por $\sim$ é uma partição de X; e*
2. *Se P for uma partição de X, então a relação em X definida por $x \sim y$ se e somente x estiver na mesma célula de P que y é uma relação de equivalência em X.*

Observe que, em cada caso, as células da partição são as classes de equivalência do conjunto na relação de equivalência correspondente.

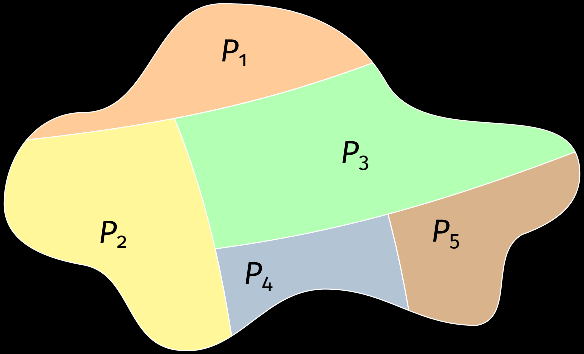


Figura 1: Uma partição induz uma relação de equivalência e uma relação de equivalência induz uma partição.

Demonstração.

Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. Claramente, as classes de equivalência de X por $\sim$ são conjuntos não vazios cuja união é X. Portanto, basta mostrar $Y \cap Y' = \emptyset$ para cada par de classes de equivalência $Y \neq Y'$ de X por $\sim$.

Sejam Y, Y' classes de equivalência de X por $\sim$ que NÃO são disjuntas. Existe um elemento $z \in Y \cap Y'$. Então, $[z] = Y$ e $[z] = Y'$ e então $Y = Y'$. Portanto, se $Y \neq Y'$, $Y \cap Y' = \emptyset$.

Finalmente, a volta é direta. $\triangleleft$

Notação

Dada uma relação de equivalência $\sim$ *em* X*, denotamos por* $X/\sim$ *o conjunto das classes de equivalência de* $\sim$*. A projeção natural de* X *em* $X/\sim$ *é a aplicação dada por*

$$\begin{aligned} \pi : \quad X &\to X/\sim \ . \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Definição

Uma ***relação de ordem parcial*** *num conjunto X é uma relação $\leq$ em X com as seguintes propriedades:*

a $x \leq x$ para todo $x \in X(\leq$ é reflexiva$)$;

b se $x \leq y$ e $y \leq x,$ então $x = y(\leq$ é antissimétrica$)$;

c se $x \leq y$ e $y \leq z,$ então $x \leq z(\leq$ é transitiva$)$.

Neste caso diremos que X é um ***conjunto parcialmente ordenado***.

Diremos que $\leq$ é uma relação de ordem total se além de verificar a, b e c, *também verifica*

d dados $x, y \in X$, tem-se que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Neste caso diremos que X é um ***conjunto totalmente ordenado***.

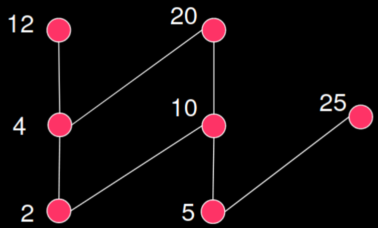
Exemplos

- a. Se X é um conjunto, então a relação de inclusão é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(X)$.
- b. A relação de ordem usual em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem total.

Diagramas de Hasse

- A relação é reflexiva–possui laços em todos os nós. Não é preciso colocar os laços
- Transitiva–não é necessário colocar as arestas que ilustram a transitividade
- Os elementos maiores são colocados acima.

Diagrama de Hasse para a ordem $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$:



Definição

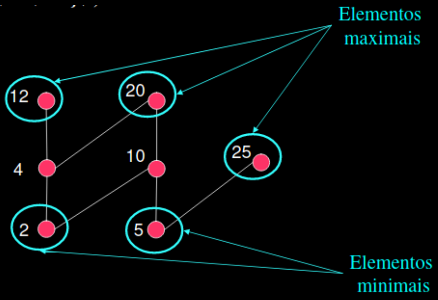
Seja X um conjunto parcialmente ordenado, e seja $A \subset X$.

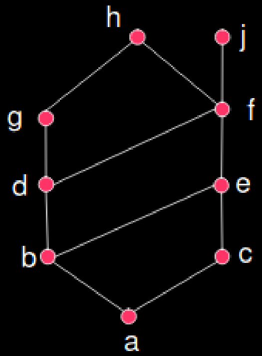
- a *Se existir $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que a_0 é o* ***elemento mínimo*** *de A. Analogamente definimos* ***elemento máximo*** *.*
- b *Se existir $a_0 \in A$ tal que $a = a_0$ sempre que $a \in A$ e $a \leq a_0$, diremos que a_0 é um* ***elemento minimal*** *de A. Analogamente definimos* ***elemento maximal****.*
- c *Se existir $c \in X$ tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que A é* ***limitado inferiormente*** *e que c é uma* ***cota inferior*** *de A. Analogamente definimos* ***conjunto limitado superiormente*** *e* ***cota superior****.*
- d *Diremos que A é uma* ***cadeia*** *em X se A é totalmente ordenado sob a relação de ordem parcial induzida por X.*
- e *Diremos que A é* ***bem ordenado*** *se cada subconjunto não vazio de A possui um elemento mínimo.*

Diagramas de Hasse

Diagrama de Hasse para a ordem

$(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$:





Exemplos

a. $\mathbb{N}$, com a ordem usual, é um conjunto bem ordenado.

b. $\mathbb{R}$, com a ordem usual, é um conjunto totalmente ordenado, que não é bem ordenado: o intervalo aberto (a, b) não possui elemento mínimo.

"If you are building a mathematical object in stages and find that
(i) you have not finished even after infinitely many stages, and
(ii) there seems to be nothing to stop you continuing to build, then Zorn's lemma may well be able to help you."
- William Timothy Gowers, "How to use Zorn's lemma"

(Lema de Zorn)

Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $(A, \sim)$ é indutivo se todo subconjunto totalmente ordenado de A tiver um limite superior em A.

O ponto crucial sobre os conjuntos indutivos é que podemos reescrever o Lema de Zorn como:

Lema (de Zorn)

Se um conjunto parcialmente ordenado $(A, \sim)$ for indutivo, existe um elemento máximoal de A.

(Teorema de Zermelo)

Todo conjunto não vazio pode ser bem ordenado.

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

a. *O Axioma da escolha.*
b. *O Lema de Zorn.*
c. *O Teorema de Zermelo.*

Cardinalidade

Definição

Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, denotado por $|A| = |B|$, se existe uma função bijetiva $f \colon A \to B$.

Portanto, A é um conjunto finito se e somente se $|A| < \infty$. Se A não for finito, escreveremos $|A| = \infty$.

Exemplo

Os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 5\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 \leq n \leq 0\}$ tem a mesma cardinalidade porque existe uma função bijetiva $f : A \to B$ dada por $f(n) = -n$.

Teorema

Existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. *Portanto* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

O fato de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ terem a mesma cardinalidade nos levar a querer comparar as cardinalidades de outros conjuntos infinitos. Como, por exemplo, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ se comparam?

De fato, $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. Esse fato foi descoberto vez por Georg Cantor (1845-1918), que inventou um argumento engenhoso para mostrar que não há funções sobrejetivas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Isto por sua vez implica que não pode haver bijeções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Teorema

Não existe nenhuma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Portanto* $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Esta é a nossa primeira indicação da existência de diferentes tipos de infinitos. Tanto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos infinitos, mas $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Definição

Seja A um conjunto. Dizemos que A é infinito enumerável se $|\mathbb{N}| = |A|$, isto é, se existe uma bijeção $\mathbb{N} \to A$. O conjunto A é não enumerável se A for infinito e $|\mathbb{N}| \neq |A|$, ou seja, se A for infinito e não existir bijeção $\mathbb{N} \to A$.

Assim $\mathbb{Z}$ é infinito enumerável, mas $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Definição

A cardinalidade dos números naturais é denotada como $\aleph_0$. *Ou seja,* $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. *Assim, qualquer conjunto infinito enumerável tem cardinalidade* $\aleph_0$.

Teorema

Um conjunto A é infinito enumerável se, e somente se, seus elementos puderem ser organizados em uma lista infinita $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Teorema

O conjunto $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é infinito enumerável.*

Corolário

Dado n conjuntos infinitos enumeráveis $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$*, com* $n \geq 2$*, o produto cartesiano* $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ *também é infinito enumerável.*

Teorema

Se A e B são ambos infinitos enumeráveis, então $A \cup B$ é infinito enumerável.

Lema

Sejam A e B conjuntos, e suponha $|A| = \infty$. Se, para cada $x \in A$, tivermos um conjunto finito de $I_x \subseteq B$ então $|A| \geq |\bigcup_{x \in A} I_x|$.

Comentários Finais.